TESIS DE MAESTRÍA

Álgebra de Frobenius y nearly Frobenius para la categoría de adg

Debora Stalker

Orientador: Ana Karina González

Junio de 2018
Montevideo
Uruguay

Magíster en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Dedicado a
mi familia

Resumen

El trabajo se centra en el estudio de la categoría de álgebras diferenciales graduadas de Frobenius. Esta categoría combina los conceptos de álgebras de Frobenius y de álgebras diferenciales graduadas. A los objetos de esta nueva categoría los denominaremos álgebras diferenciales graduadas de Frobenius. Probaremos que los resultados clásicos relativos a las $\mathbb{K}$-álgebras de Frobenius valen en este nuevo contexto. Por ejemplo, uno de los resultados que probaremos será que si A es un álgebra diferencial graduada de Frobenius de tipo finito simétrica podemos definir un coproducto graduado en A de forma tal que éste resulte un morfismo de A-bimódulos. Este coproducto junto a la forma de Frobenius ε le darán a A estructura de coálgebra graduada. En este sentido, veremos también que si A es un álgebra diferencial graduada de Frobenius podremos asociarle una familia de automorfismos de A que serán los automorfismos de Nakayama y estos serán la clave para probar que el resultado que acabamos de mencionar sobre la existencia de coproductos graduados en A vale aún si carecemos de la hipótesis de simetría para A.

A lo largo de este trabajo, mostraremos que si bien las primeras definiciones y resultados están dadas en un contexto 0 graduado, de hecho las mismas definiciones pueden darse en un contexto n-graduado por medio de un corrimiento de grado a través de una función que llamaremos shift de grado n. La ventaja de tener las definiciones ahora en el contexto n graduado radica en que será más fácil encontar ejemplos de álgebras diferenciales graduadas de Frobenius con diferencial no trivial. También en este contexto definiremos lo que serán las álgebras diferenciales graduadas nearly Frobenius de grado n.

Finalmente daremos dos ejemplos de álgebras diferenciales graduadas nearly Frobenius, una de dimensión finita y otra de dimensión infinita.

Abstract

The work focuses on the study of the category of Frobenius differential graded algebras. This category combines the concepts of Frobenius algebras and graded differential algebras.
We proved that the classic results of Frobenius algebras are worth in this new category.
For example, we proved that if A is a symmetric Frobenius differential graded algebra of finite type then it admits a graded coproduct wich is a morphism of A-bimodules. This coproduct together with the Frobenius form give A graded coalgebra structure. In this sense, we also prove that if A is a Frobenius differential graded algebra then it has associated a family of automorphisms, called Nakayama automorphisms wich are the key to prove the existence of graded coproducts when the algebra is not symmetric.

Throughout the work we show that although the first definitions and results are given in a 0-graduate context also are worth for the case n-graduate, it is enough to consider a degree shift through a function that we will call shift of degree n. The advantage of working in the n-graduate case is that it will be easier to build examples of Frobenius differential graded algebras with non-trivial differential in this context. Also, in this context we define nearly Frobenius differential graded algebras of degree n.
We finish the thesis presenting a couple of examples, one of Frobenius differential graded algebra and the other of nearly Frobenius differential graded algebra.

Índice

Introducción

Esta tesis se enmarca dentro del contexto general de álgebras de Frobenius, álgebras nearly Frobenius y álgebras diferenciales graduadas.

Las álgebras de Frobenius fueron estudiadas por primera vez en 1903 por Frobenius, especialmente en teoría de representaciones. Más tarde en 1930 Brauer y Nesbitt retomaron el estudio de las mismas y en 1969 Lawvere las caracterizo en términos de coproductos. En los últimos tiempos la sorprendente conexión encontrada con las teorías topológicas cuánticas de campos ha convertido a las álgebras de Frobenius en objetos de renovado interés. Por otra parte, las álgebras nearly Frobenius surgen como una generalización del concepto de álgebra de Frobenius.

El concepto de álgebra diferencial graduada toma real importancia alrededor de 1960. Previamente los objetos con un diferencial habían sido pensados a menudo como meramente un mecanismo para calcular la homología, pero en 1967 D. Quillen descubre que estos objetos llevan una teoría de homotopía que es mucho más rica que la homología. Por ejemplo, si X es un CW complejo simplemente conexo de tipo finito el tipo de homotopía del álgebra de cocadenas $C^*(X)$ es suficiente para calcular la homología del espacio de lazos $H_*(\Omega X)$ que por otro lado no puede calcularse a partir del álgebra de cohomología $H^*(X)$. Félix en [5] y en [6] hace especial hincapié en estos resultados de teoría de homotopía y Abbaspour en [4] introduce una estructura natural homotópica de BV-álgebra sobre la homología de Hochschild $HH_*(A, A)$ siendo A un álgebra diferencial graduada y además un álgebra de Frobenius simétrica. También prueba que puede definir un coproducto en $HH_*(A, A)$ que le da estructura de álgebra nearly Frobenius. A partir de este artículo es que surge nuestro interés por las álgebras diferenciales graduadas y la posibilidad de darles a estas últimas una estructura de Frobenius.

El primer objetivo de este trabajo es, dada la categoría de álgebras de Frobenius por un lado, y la categoría de álgebras diferenciales graduadas (adg) por otro, definir una nueva categoría cuyos objetos serán, lo que llamaremos, álgebras diferenciales graduadas de Frobenius. En términos generales estas álgebras no serán otra cosa que un complejo (A, d) junto con dos estructuras adicionales, una estructura de álgebra graduada de forma tal que el producto $m : A \otimes A \to A$ es compatible con el diferencial d en algún sentido que explicitaremos, y una estructura de coálgebra graduada de forma tal que el coproducto $\Delta : A \to A \otimes A$ sea un morfismo de A-bimódulos.

Una vez definida esta nueva categoría veremos que algunos de los resultados clásicos válidos para las $\mathbb{K}-$álgebras de Frobenius, como el Teorema de Abram y Lauda, y la existencia de los automorfismos de Nakayama valen también en esta nueva categoría. Al respecto del Teorema de Abram, la primer prueba que daremos nos exigirá que el álgebra diferencial graduada de Frobenius sea simétrica, entendiéndose por simétrica que si $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ es la forma de Frobenius de A esta verifica que $\varepsilon(ab) = (-1)^{|a||b|}\varepsilon(ba)$ para todos $a, b \in A$. Luego mostraremos que haciendo uso de los automorfismos de Nakayama la prueba es igualmente válida si carecemos de la hipótesis de simetría. La herramienta de hacer uso de los automorfismos de Nakayama para probar el Teorema de Abram en el caso no simétrico es uno de los aportes originales de esta tesis.

El segundo objetivo de esta tesis es mostrar que las definiciones dadas de álgebras diferenciales graduadas de Frobenius se pueden redefinir ahora en un contexto n-graduado, permitiendo que los mapas lineales involucrados en la estructura sean de grado n. El motivo de mirar las definiciones en este contexto radica en el hecho de que es más natural encontar ejemplos de álgebras diferenciales graduadas de Frobenius si tenemos la libertad de graduar el coproducto. En este sentido lo que haremos será probar que los mapas lineales de grado n pueden ser vistos como pullbacks de mapas lineales de grado 0 por medio de un corrimiento de grado (shift). Esto nos permitirá traspolar las definiciones que teníamos en el contexto 0-graduado ahora al contexto n-graduado sin mayores dificultades y también definir por primera vez en este trabajo lo que llamaremos álgebras nearly Frobenius de grado n.

Finalmente daremos dos ejemplos de álgebras diferenciales graduadas nearly Frobenius, una de dimensión finita que admitirá una completación a un álgebra diferencial graduada de Frobenius y otra de dimensión infinita. Ambos ejemplos serán cocientes de anillos de polinomios. El primer ejemplo está basado en uno de los tantos ejemplos de $\mathbb{K}$-álgebras de Frobenius que pueden encontrarse en [3]. El segundo ejemplo es el otro aporte personal de este trabajo.

La estructura de esta tesis es la que sigue.

En el capítulo uno, en las primeras dos secciones comenzaremos recordando algunos resultados de formas bilineales no degeneradas en dimensión finita que nos serán de suma utilidad en las próximos capítulos.
A continuación definiremos la categoría de álgebras diferenciales graduadas (adg) y veremos que si A es un adg y (M, d) es un complejo, podemos darle a M una estructura de A-módulo graduado. Como ejemplo de esto último veremos que (A^*, d) tendrá estructura de A-módulo graduado a derecha y a izquierda. La sección dos de este capítulo finaliza con la definición de coálgebra graduada. En la tercer sección de este capítulo daremos tres definiciones equivalentes de álgebra de Frobenius y enunciaremos el Teorema de Abram, que nos caracterizará las álgebras de Frobenius en términos de la existencia de coproductos. Esbozaremos lo fundamental de la demostración de este teorema, pues de hecho la demostración minuciosa la veremos en el capítulo 2 en un contexto más general. También en esta sección aparecerán una lista de ejemplos de álgebras de Frobenius y una prueba de que si Δ es un coproducto en A este es único a menos de actuar por un elemento invertible del álgebra. Concluimos el capítulo introduciendo los automorfismos de Nakayama que serán escenciales en el siguiente capítulo.

En el capítulo dos, en la sección uno, definimos lo que será un álgebra de Frobenius en la categoría de álgebras diferenciales graduadas. Estos nuevos objetos permiten definir una nueva categoría que llamaremos la categoría de álgebras diferenciales graduadas de Frobenius. Mostraremos que las tres definiciones clásicas de álgebra de Frobenius en términos de la forma de Frobenius ε, la forma bilineal no degenerada asociada β y el isomorfismo de A-módulos entre (A, d) y (A^*, d) siguen valiendo en este contexto y probaremos la equivalencia entre estas definiciones en la nueva categoría. En la sección dos enunciamos y probamos el Teorema de Abram y Lauda para la categoría de álgebras diferenciales graduadas de Frobenius para el caso simétrico.

También probaremos que si A es un adg de Frobenius podemos definir los automorfismos de Nakayama asociados a A y la demostración de la existencia de tales isomorfismos será escencialmente la misma que para el caso clásico en que A es una álgebra de Frobenius. Este resultado permitirá deducir que el Teorema de Abram y Lauda es válido también en el caso no simétrico. Vale la pena destacar que en este capítulo los mapas lineales involucrados tanto a la estructura de álgebra graduada como de coálgebra graduada serán mapas lineales de grado cero. En el contexto cero graduado muchas de las pruebas se simplifican pero lo cierto es que en la práctica, a la hora de buscar ejemplos de álgebras diferenciales graduadas de Frobenius, éstos aparecen más naturalmente si permitimos que los mapas sean n-graduados, con $n \in \mathbb{Z}$ y éste es el objetivo del capítulo tres.

En el capítulo tres entonces, redefinimos los conceptos dados hasta el capítulo dos, permitiendo que los mapas lineales asociados a la estructura de coálgebra sean de grado n, pero dejando intacta la estructura de álgebra diferencial del complejo (A, d). Con esto último nos referimos a que el producto del álgebra continuará siendo un mapa lineal de grado cero. Para la forma de Frobenius ε perderemos la condición de que el $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ no contenga ideales a izquierda no triviales, pero sin embargo este continuará siendo una counidad para la estructura de coálgebra graduada junto al mapa Δ.
Seguidamente definiremos la función shift de grado n de forma tal que si A es un adg y $n \in \mathbb{Z}$, el shift de A será el álgebra A con un corrimiento de grado y enunciaremos ciertas propiedades relativas a esta función. En la segunda sección, tomaremos las definiciones de Frobenius dadas para el caso 0 graduado y vía el pullback por la función shift obtendremos qué condiciones debemos pedirles a los mapas n-graduados si queremos seguir teniendo una estructura de Frobenius en A. Concluimos el capítulo con las definiciones de álgebra diferencial graduada de Frobenius y nearly Frobenius para el caso n-graduado.

En el capítulo cuatro daremos dos ejemplos de álgebras diferenciales graduadas nearly Frobenius. El primer ejemplo consistirá de un álgebra diferencial graduada de dimensión finita con diferencial cero y admitirá ciertos coproductos graduados que le darán estructura nearly Frobenius. De todas estas estructuras, una de ellas se podrá completar a una estructura de Frobenius. Una vez hecho esto, haremos uso de un algoritmo que nos permite hallar un modelo mínimo para A, y así poder levantar la estructura de adg de A a una con diferencial no trivial. Seguidamente, nos propondremos investigar si vía este algoritmo podremos también levantar alguna de las estructuras de coproducto que tenemos en A de forma tal de obtener un adg nearly Frobenius con diferencial no trivial. El resultado que obtendremos de hecho, es que el algoritmo es meramente algebraico y que los intentos por levantar los coproductos fallaran. Tampoco estamos diciendo que no podemos encontrar ejemplos usando este algoritmo, solo que para este ejemplo concreto no podemos hacerlo. Se podría en un futuro estudiar esta herramienta en otros ejemplos.
El segundo ejemplo consistirá de un álgebra diferencial graduada de dimensión infinita con diferencial no trivial y admitirá tres coproductos de grados 4, 5 y 6. Estos serán los únicos a menos de un múltiplo escalar.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de todo este trabajo, $\mathbb{K}$ será un cuerpo de característica cero y nos referiremos a lineal, bilineal, espacio vectorial, álgebra para hablar de $\mathbb{K}$-lineal, $\mathbb{K}$-bilineal, $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\mathbb{K}$-álgebra.

1.1 Formas bilineales no degeneradas.

Comencemos recordando algunos resultados de formas bilineales no degeneradas en dimensión finita, que nos serán de utilidad en las próximas secciones.
Para esto, sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita.

Definición 1.1. Una **forma bilineal** es un mapa lineal $\langle\, ,\, \rangle : V \otimes W \to \mathbb{K}$.

Definición 1.2. Sea $\langle\, ,\, \rangle : V \otimes W \to \mathbb{K}$ una forma bilineal, decimos que $\langle\, ,\, \rangle$ **es no degenerada**:

- **a izquierda** si: $\langle v, w\rangle = 0,\ \forall v \in V \Rightarrow w = 0$,
- **a derecha** si: $\langle v, w\rangle = 0,\ \forall w \in W \Rightarrow v = 0$.

Luego $\langle\, ,\, \rangle$ es **no degenerada** si es no degenerada a izquierda y derecha.

Observación 1.3. Para cada $w \in W$ y para cada $v \in V$ podemos definir $\beta_w \in V^*$ y $\beta_v \in W^*$ por:

$$\beta_w(v) = \langle v, w\rangle = \beta_v(w).$$

Éstos permiten definir los siguientes mapas lineales:

- $\beta_{left} : W \to V^*$ dado por $\beta_{left}(w) = \beta_w$,
- $\beta_{right} : V \to W^*$ dado por $\beta_{right}(v) = \beta_v$.

De lo anterior, es inmediato el siguiente resultado:

- $\langle\, ,\, \rangle$ es no degenerada a izquierda $\Leftrightarrow \beta_{left}$ es inyectivo.
- $\langle\, ,\, \rangle$ es no degenerada a la derecha $\Leftrightarrow \beta_{right}$ es inyectivo.

Lema 1.4. *El mapa β_{right} es el dual de β_{left} (identificando $V \simeq V^{**}$).*

Demostración: Por definición, el mapa dual de β_{left} es:

$$\begin{array}{ccc} V^{**} & \xrightarrow{\beta^*_{left}} & W^* \\ T & \longrightarrow & T \circ \beta_{left} \end{array} \tag{1.1}$$

Usando la identificación $V \simeq V^{**}$ que se tiene en dimensión finita:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\simeq} & V^{**} \\ t & \longrightarrow & \mathrm{ev}_t \end{array} \tag{1.2}$$

siendo $\mathrm{ev}_t(\alpha) = \alpha(t)$, $\forall \alpha \in V^*$, resulta que el mapa dual de β_{left} puede verse como el mapa

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\beta^*_{left}} & W^* \\ t & \longrightarrow & \mathrm{ev}_t \circ \beta_{left} \end{array} \tag{1.3}$$

Veamos que β_{right} coincide con este mapa, es decir para cada $t \in V$ se tiene: $\beta_{right}(t) = \mathrm{ev}_t \circ \beta_{left}$. A tales efectos, dado $z \in W$ (arbitrario) tenemos que:

$$\beta_{right}(t)(z) = \beta_t(z) = \langle t, z \rangle = \beta_z(t) = \mathrm{ev}_t(\beta_z) = (\mathrm{ev}_t \circ \beta_{left})(z)$$

$\square$

Teorema 1.5. *Si* $\langle\, , \rangle : V \otimes W \to \mathbb{K}$ *es una forma bilineal, tal que* $\dim(V) = \dim(W)$, *entonces son equivalentes:*

1. $\langle\, , \rangle$ *es no degenerada,*
2. $\langle\, , \rangle$ *es no degenerada a izquierda,*
3. $\langle\, , \rangle$ *es no degenerada a derecha.*

Demostración:

- 1) $\Rightarrow$ 2) es inmediato por definición de forma bilineal no degenerada.
- 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\langle\, , \rangle$ es no degenerada a izquierda $\Leftrightarrow$ β_{left} es inyectivo $\Leftrightarrow$ β^*_{left} es sobreyectivo $\Leftrightarrow$ β_{right} es sobreyectivo $\Leftrightarrow$ β_{right} es isomorfismo $\Leftrightarrow$ β_{right} es inyectivo $\Leftrightarrow$ $\langle\, , \rangle$ es no degenerada a derecha.
  En las equivalencias β_{right} es sobreyectivo $\Leftrightarrow$ β_{right} es isomorfismo $\Leftrightarrow$ β_{right} es inyectivo, usamos que $\dim V = \dim W = \dim W^*$.
- 3) $\Rightarrow$ 1) Si $\langle\, , \rangle$ es no degenerada a derecha $\Rightarrow$ $\langle\, , \rangle$ es no degenerada a izquierda $\Rightarrow$ $\langle\, , \rangle$ es no degenerada.

$\square$

Observación 1.6. Si $\langle\, , \rangle : V \otimes W \to \mathbb{K}$ es no degenerada, $\dim(V) = \dim(W)$, $\{v_1, \cdots, v_n\}$ y $\{w_1, \cdots, w_n\}$ son bases de V y W respectivamente, podemos definir la matriz $P \in M_n(\mathbb{K})$, $P = (p_{ij})$ como $p_{ij} = \langle v_i, w_j \rangle$. Diremos que P es la matriz asociada a la forma bilineal $\langle\, , \rangle$. Luego P es invertible:
Sea $v = \sum_{j=1}^n \xi_j v_j \in V$ y $w = \sum_{l=1}^n \alpha_l w_l \in W$ arbitrarios. Entonces

$$\langle v, w_k \rangle = \sum_{j=1}^n \xi_j \langle v_j, w_k \rangle = \sum_{j=1}^n \xi_j p_{jk}$$

$$\langle v_k, w\rangle = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \langle v_k, w_l\rangle = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l p_{kl}$$

para todo $k \in \{1, \cdots, l\}$. La forma $\langle\, ,\, \rangle$ es no degenerada si y sólo si $\langle v, -\rangle \neq 0 \neq \langle -, w\rangle$ para todo $0 \neq v \in V$ y $0 \neq w \in W$, que es claramente equivalente a que P sea invertible.

1.2 Categoría de álgebras diferenciales graduadas (adg).

En esta sección definiremos los conceptos básicos relativos a las álgebras diferenciales graduadas y enunciaremos algunos resultados sobre las mismas, que usaremos con posterioridad. Por más información sobre el tema consultar [5].

Definición 1.7. Un **complejo** (M, d) es un espacio vectorial graduado M junto con un **diferencial** d. Más explícitamente, es una familia $M = \{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de espacios vectoriales y de mapas lineales $d = \{d_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tales que para cada i, $d_i : M_i \to M_{i-1}$ y $d_{i-1}d_i = 0$. Los elementos que pertenecen a M_i se llaman homogéneos de grado i.

Notación 1.8. $|m| =$ grado de m.

Para simplificar notación denotaremos simplemente por d para referirnos a d_i cualquiera sea el i. Así por ejemplo, la condición $d_{i-1}d_i = 0$ que se tiene para cada i, la denotaremos simplemente como $d^2 = 0$.

Definición 1.9. Dado (M, d) un complejo, decimos que es de **tipo finito** si $\dim M_i < \infty$ para todo i.

Definición 1.10. Un **mapa lineal** $f : (M, d) \to (N, d)$ **de grado** $i \in \mathbb{Z}$ es una familia de mapas lineales $f_j : M_j \to N_{j+i}$.

Notación 1.11. $|f|$ =grado de f.

Definición 1.12. Un **morfismo de complejos** $f : (M, d) \to (N, d)$ es un mapa lineal de grado cero tal que conmuta con el diferencial, es decir $d \circ f = f \circ d$.

Ejemplos 1.13.
1. El cuerpo $\mathbb{K}$ puede ser visto como un complejo de la siguiente manera: $\mathbb{K} = \{K_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $K_i = 0\ \forall i \neq 0$, $K_0 = \mathbb{K}$ y $d = 0$.

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{K} \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \cdots$$

2. Si (M, d) y (N, d) son complejos, también lo son $\mathrm{Hom}(M, N)$ y $M \otimes N$:

$$\mathrm{Hom}(M, N)_i = \{f : M \to N : f \text{ es lineal de grado i}\}\ ,\ d(f) = df - (-1)^{|f|} fd$$

$$(M \otimes N)_i = \bigoplus_{j+k=i} M_j \otimes N_k\ ,\ d(m \otimes n) = dm \otimes n + (-1)^{|m|} m \otimes dn$$

Observación 1.14. Observar que si en el ejemplo anterior $(N, d) = (\mathbb{K}, 0)$, y $f \in \mathrm{Hom}(M, \mathbb{K})_i$, entonces $f_j = 0$ para todo $j \neq -i$, por lo que si identificamos f con $f_{-i} : M_{-i} \to \mathbb{K}$, podemos entonces identificar $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{K})_i$ con M^*_{-i}.
Además dado que $d = 0$ en $\mathbb{K}$, $d(f) = -(-1)^{|f|} fd$.

Definición 1.15. Un **álgebra diferencial graduada** (adg) es un complejo (A, d) junto con un mapa lineal asociativo de grado cero $m : A \otimes A \to A$, $m(a \otimes b) = ab$ que llamaremos producto, con una unidad $1_A \in A_0$ de forma tal que d es una **derivación**, es decir:

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^{|a|} ad(b) \quad \forall a, b \in A.$$

Observaciones 1.16.

1. Explícitamente, para cada $i, j \in \mathbb{Z}$ tenemos que $m : A_i \otimes A_j \to A_{i+j}$. Que m sea asociativo es pedir que se verifique que $a(bc) = (ab)c$, $\forall a, b, c \in A$.
   Que m sea de grado cero implica que $|ab| = |a||b|$, $\forall a, b \in A$.

2. A_0 es una subálgebra de A, es decir $A_0.A_0 \subset A_0$ y $1_A \in A_0$.

A continuación probaremos un resultado para las adg's que nos será de utilidad más adelante, y que es corolario del Teorema 1.5.

Proposición 1.17. *Si $A = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es un adg de tipo finito y supongamos que para cada $i \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\langle\, , \rangle_i : A_i \otimes A_{-i} \to \mathbb{K}$ es una forma bilineal no degenerada a izquierda (o a derecha), entonces $\langle\, , \rangle_i$ es no degenerada.*

Demostración: Este resultado es consecuencia del Teorema 1.5 si probamos que para cada $i \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\dim A_i = \dim A_{-i}$.
Para cada $i \in \mathbb{Z}$, sean

$$\beta^i_{left} : A_{-i} \to A_i^* \quad , \quad \beta^i_{right} : A_i \to A_{-i}^*$$

los mapas lineales asociados a la forma bilineal no degenerada a izquierda (o a derecha) dada por $\langle\, , \rangle_i : A_i \otimes A_{-i} \to \mathbb{K}$ (ver observación 1.3). Como $\langle\, , \rangle_i$ es no degenerada a izquierda (o a derecha), entonces β^i_{left} (o β^i_{right}) es inyectivo. Por lo tanto:

$$A_{-i} \hookrightarrow A_i^* \simeq A_i \hookrightarrow A_{-i}^* \simeq A_{-i}.$$

Luego $A_i \simeq A_{-i}$, lo que implica que $\dim A_i = \dim A_{-i}$. □

Definición 1.18. Un **morfismo de álgebras diferenciales graduadas** es un morfismo de complejos $f : (A, d) \to (B, d)$ que es además un morfismo de álgebras, es decir: $f(ab) = f(a)f(b)$ para todos $a, b \in A$.

Observación 1.19. Si $m^* : A^* \to (A \otimes A)^*$ es el mapa dual de m y $\alpha : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ el isomorfismo dado por $\alpha(f \otimes g)(a \otimes b) = g(a)f(b)$, $\forall f, g \in A^*$ y $a, b \in A$, entonces m^* y α son morfismos de complejos, y podemos pensar a $m^* : A^* \to A^* \otimes A^*$.

- m^* es morfismo de complejos: sean $f \in A^*$ y $a, b \in A$. Entonces

  $$\begin{aligned} d(m^*(f))(a \otimes b) &= d(f \circ m)(a \otimes b) = -(-1)^{|f|} f(d(ab)) = d(f)(ab) = (d(f) \circ m)(a \otimes b) \\ &= m^*(d(f))(a \otimes b) \end{aligned}$$

  donde en la segunda igualdad usamos la definición del diferencial en el dual y que m conmuta con el diferencial.

- Que α es morfismo de complejos, se deduce fácilmente usando las definiciones del diferencial en el producto tensorial y en el dual, y observando que $|\alpha(f \otimes g)| = |f| + |g|$.

Ejemplos 1.20.

1. $(\mathbb{K}, 0)$ es un adg, con el producto del cuerpo.

2. Si A y B son adg's, también lo son $\mathrm{Hom}(A, A)$ con el producto definido como la composición de mapas y $A \otimes B$ con el producto definido por

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|} aa' \otimes bb'.$$

Las estructuras de complejos de $\mathrm{Hom}(A, A)$ y de $A \otimes B$ se encuentra detallada en los Ejemplos 1.13.

Definición 1.21. Un **álgebra diferencial graduada conmutativa** es un adg cuyo producto es conmutativo en el siguiente sentido:

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba.$$

Definición 1.22. Un adg A se dice **conmutativa libre** si $A = \dfrac{TM}{I}$, siendo TM el álgebra tensorial sobre un espacio vectorial graduado M, e I el ideal bilátero generado por los elementos $a \otimes b - (-1)^{|a||b|} b \otimes a$, $a, b \in M$.

Observación 1.23. Denotaremos por $\wedge M$ al adg conmutativa libre sobre el espacio vectorial graduado M. Además si $\{m_i\}$ es una base de M, escribiremos $\wedge M = \wedge(\{m_i\})$.

Definición 1.24. Sea A un adg y (M, d) un complejo. Decimos que (M, d) es un A-**módulo a izquierda** si existe un mapa lineal de grado cero $A \otimes M \to M$, $a \otimes m \to a.m$ que cumple las siguientes condiciones:

- $a.(b.m) = (ab).m$ y $1_A.m = m$ para todos $a, b \in A$ y $m \in M$;
- $d(a.m) = da.m + (-1)^{|a|} a.dm$.

Definición 1.25. Sea A un adg y (M, d) un complejo. Decimos que (M, d) es un A-**módulo a derecha** si existe un mapa lineal de grado cero $M \otimes A \to M$, $m \otimes a \to m.a$ que cumple las siguientes condiciones:

- $(m.a).b = m.(ab)$ y $m.1_A = m$ para todos $a, b \in A$ y $m \in M$;
- $d(m.a) = dm.a + (-1)^{|m|} m.da$.

Definición 1.26. Sea A un adg y (M, d) un complejo. Decimos que (M, d) es un A-**bimódulo** si es un A-módulo a izquierda y derecha.

Definición 1.27. Sea A un adg, (M, d) y (N, d) A-módulos a izquierda (o derecha). Un **morfismo de A-módulos** $f : (M, d) \to (N, d)$ es un morfismo de complejos que verifica $f(a.m) = a.f(m)$(respectivamente $f(m.a) = f(m).a$) para todos $a \in A$ y $m \in M$.

Proposición 1.28. *Si A es un adg, (A^*, d) es un A-módulo a izquierda y a derecha con las acciones dadas por:*

$$\begin{array}{ccccccc} A \otimes A^* & \longrightarrow & A^* & , & A^* \otimes A & \longrightarrow & A^* \\ a \otimes \varphi & \longrightarrow & a.\varphi & & \varphi \otimes a & \longrightarrow & \varphi.a \end{array} \tag{1.4}$$

donde $(a.\varphi)(b) = (-1)^{|a|(|\varphi|+|b|)} \varphi(ba)$ y $(\varphi.a)(b) = \varphi(ab)$, $\forall b \in A$.

Demostración: Demostraremos el resultado para la acción a la izquierda. Para la acción a la derecha es análogo. Dado que ya sabemos que (A^*, d) es un complejo (ver Ejemplo 1.13 y Observación 1.14) resta probar que:

1. La acción arriba definida, es efectivamente una acción a izquierda, es decir que $a.(a'.\varphi) = (aa').\varphi$ y $1.\varphi = \varphi$, $\forall a, a' \in A$ y $\varphi \in A^*$.

2. Que el diferencial en A^* verifica

$$d(a.\varphi) = da.\varphi + (-1)^{|a|}a.d\varphi, \quad \forall a \in A,\, \varphi \in A^*.$$

Sea $b \in A$ arbitrario. Luego:

$$\begin{aligned}
(a.(a'.\varphi))(b) &= (-1)^{|a|(|(a'.\varphi)|+|b|)}(a'.\varphi)(ba) = (-1)^{|a|(|(a'.\varphi)|+|b|)}(-1)^{|a'|(|\varphi|+|ba|)}\varphi(baa')\\
&= (-1)^{|a|(|a'|+|\varphi|+|b|)+|a'|(|\varphi|+|b|+|a|)}\varphi(baa') = (-1)^{(|a|+|a'|)(|\varphi|+|b|)}\varphi(baa')\\
&= (-1)^{|aa'|(|\varphi|+|b|)}\varphi(baa') = ((aa').\varphi)(b).
\end{aligned}$$

$$(1.\varphi)(b) = (-1)^{|1|(|\varphi|+|b|)}\varphi(b) = \varphi(b) \text{ ya que } |1| = 0.$$

Para probar la condición que debe cumplir el diferencial desarrollemos ambos lados de la igualdad y veamos que llegamos al mismo resultado. Desarrollando el lado izquierdo y haciendo uso de la observación 1.14 obtenemos que:

$$\begin{aligned}
d(a.\varphi)(b) &= -(-1)^{|a.\varphi|}(a.\varphi)(d(b)) = -(-1)^{|a|+|\varphi|}(-1)^{|a|(|\varphi|+|d(b)|)}\varphi(d(b)a)\\
&= -(-1)^{|a|(1+|\varphi|+|d(b)|)+|\varphi|}\varphi(d(b)a) = -(-1)^{|a|(1+|\varphi|+|b|-1)+|\varphi|}\varphi(d(b)a)\\
&= -(-1)^{|a|(|\varphi|+|b|)+|\varphi|}\varphi(d(b)a).
\end{aligned}$$

Desarrollando el lado derecho resulta que:

$$(d(a).\varphi)(b) + (-1)^{|a|}(a.d\varphi)(b) = (-1)^{|d(a)|(|\varphi|+|b|)}\varphi(bd(a)) + (-1)^{|a|}(-1)^{|a|(|d\varphi|+|b|)}(d\varphi)(ba) \quad (1.5)$$

Ahora como

$$\begin{aligned}
(d\varphi)(ba) &= -(-1)^{|\varphi|}\varphi(d(ba)) = -(-1)^{|\varphi|}\varphi(d(b)a + (-1)^{|b|}bd(a))\\
&= -(-1)^{|\varphi|}\varphi(d(b)a) - (-1)^{|\varphi|+|b|}\varphi(bd(a)),
\end{aligned}$$

sustituyendo $(d\varphi)(ba)$ en la ecuación 1.5, se deduce que:

- el coeficiente de $\varphi(bd(a))$ es

$$(-1)^{|d(a)|(|\varphi|+|b|)} - (-1)^{|a|+|a|(|d\varphi|+|b|)+|\varphi|+|b|} = (-1)^{|a|(|\varphi|+|b|)}((-1)^{-(|\varphi|+|b|)} - (-1)^{|\varphi|+|b|}) = 0.$$

- el coeficiente de $\varphi(d(b)a)$ es

$$\begin{aligned}
-(-1)^{|a|+|a|(|d\varphi|+|b|)+|\varphi|} &= -(-1)^{|a|(1+|d\varphi|+|b|)+|\varphi|} = -(-1)^{|a|(1+|\varphi|-1+|b|)+|\varphi|}\\
&= -(-1)^{|a|(|\varphi|+|b|)+|\varphi|}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(d(a).\varphi)(b) + (-1)^{|a|}(a.d\varphi)(b) = -(-1)^{|a|(|\varphi|+|b|)+|\varphi|}\varphi(d(b)a).$$

Entonces, se tiene la igualdad deseada:

$$d(a.\varphi)(b) = (d(a).\varphi)(b) + (-1)^{|a|}(a.d\varphi)(b).$$

□

Definición 1.29. Una **coálgebra graduada** es un espacio vectorial graduado M junto con dos mapas lineales de grado cero, el coproducto $\Delta : M \to M \otimes M$, y la counidad $\varepsilon : M \to \mathbb{K}$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & M \otimes M \arrow[d, "\Delta\otimes 1"] \\ M \otimes M \arrow[r, "1\otimes\Delta"'] & M \otimes M \otimes M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \otimes \mathbb{K} & M \otimes M \arrow[l, "1\otimes\varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon\otimes 1"] & \mathbb{K} \otimes M \\ & M \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

El primero de estos diagramas es la propiedad de coasociatividad del coproducto.

Ejemplo 1.30. *El álgebra tensorial como coálgebra graduada.*

Sea TM el álgebra tensorial sobre un espacio vectorial graduado M.
Definimos $\Delta : TM \to TM \otimes TM, \quad \varepsilon : TM \to \mathbb{K}$, por

$$\Delta(m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n) = \sum_{i=0}^{n} (m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_i) \otimes (m_{i+1} \otimes m_{i+2} \otimes \cdots \otimes m_n),$$

$$\varepsilon(1_M) = 1 \quad \text{y} \quad \varepsilon(m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n) = 0 \quad \text{si} \quad n \geq 1.$$

1.3 Categoría de álgebras de Frobenius.

En esta sección A denotará un álgebra, es decir, un espacio vectorial junto con dos mapas lineales $m : A \otimes A \to A$, y $u : \mathbb{K} \to A$ llamados producto y unidad tales que m es asociativo y u es la unidad ($u(1) = 1_A$).

A continuación daremos la definición de álgebra de Frobenius.

Definición 1.31. Un **álgebra de Frobenius** es un álgebra A de dimensión finita junto a una forma bilineal no degenerada $\langle\, ,\, \rangle : A \otimes A \to \mathbb{K}$ que es asociativa, en el sentido que $\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle$, $\forall a, b, c \in A$.

Proposición 1.32. *Sea A un álgebra de dimensión finita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es un álgebra de Frobenius.*
2. *Existe un mapa lineal $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ que llamaremos forma de Frobenius, tal que el* $\operatorname{Ker}(\varepsilon)$ *no contiene ideales a izquierda no triviales.*

3. *Existe un isomorfismo de A-módulos $\lambda : A \to A^*$, donde el espacio dual A^* es un A-módulo con la acción dada por $(a.\varphi)(b) = \varphi(ba)$ para todos $a, b \in A$.*

En consecuencia, cualquiera de las tres afirmaciones equivalenes serán definiciones de álgebra de Frobenius.

Demostración:

- (1) $\Rightarrow$ (2) Dada la forma bilineal no degenerada $\langle \, , \, \rangle : A \otimes A \to \mathbb{K}$ definimos la forma de Frobenius del siguiente modo

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & A & \to & \mathbb{K} \\ & a & \to & \langle 1_A, a \rangle. \end{array} \tag{1.6}$$

- (2) $\Rightarrow$ (3) Si tenemos la forma de Frobenius $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ definimos el isomorfismo λ del siguiente modo

$$\begin{array}{rcccccc} \lambda : & A & \to & A^* & & & \\ & a & \to & \lambda(a) : & A & \to & \mathbb{K} \\ & & & & b & \to & \varepsilon(ba). \end{array} \tag{1.7}$$

- (3)$\Rightarrow$ (1) Finalmente, dado $\lambda : A \to A^*$ definimos la forma bilineal del siguiente modo

$$\begin{array}{rccc} \langle \, , \, \rangle : & A \otimes A & \to & \mathbb{K} \\ & a \otimes b & \to & \lambda(1_A)(ab). \end{array} \tag{1.8}$$

La prueba de los detalles puede encontrarse en [7]. □

Observación 1.33. De la proposición anterior se deduce que

$$\lambda(a) = a.\varepsilon \quad \forall a \in A$$

Definición 1.34. Un **morfismo de álgebras de Frobenius** es un morfismo de álgebras $f : A \to B$ que verifica que $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$ siendo ε_A y ε_B las formas de Frobenius de A y B respectivamente.

Ejemplos 1.35.

1. *El álgebra de Frobenius trivial.*
   Sea $A = \mathbb{K}$ y $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ el mapa identidad de $\mathbb{K}$. Claramente el $\ker(\varepsilon)$ no contiene ideales no triviales, por lo tanto tenemos un álgebra de Frobenius.

2. *Un ejemplo concreto.*
   El cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ es un álgebra de Frobenius sobre $\mathbb{R}$, definiendo la forma de Frobenius $\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ como $\varepsilon(a + ib) = a$. Es claro que $\ker(\varepsilon) \simeq \mathbb{R}$ y que por lo tanto no contiene ideales no triviales.

3. *Álgebra de grupo finito.*
   Sea $G = \{e, g_1, \cdots, g_n\}$ un grupo finito, el álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$ está definida como el conjunto de combinaciones lineales formales $\sum_{i=0}^{n} c_i g_i$, donde $c_i \in \mathbb{C}$, con el producto dado por la multiplicación de G. Ésta admite estructura de álgebra de Frobenius si tomamos como forma de Frobenius al funcional

$$\begin{array}{rcccl} \varepsilon : & \mathbb{C}[G] & \to & \mathbb{C} & \\ & e & \to & 1 & \\ & g_i & \to & 0 & \text{si } i = 1, \cdots, n. \end{array}$$

Es claro que la forma bilineal asociada $\langle g, h\rangle = \varepsilon(gh)$ es no degenerada pues si $\varepsilon(gh) = 0$ para todo h y fuera $g \neq 0$, tomando $h = g^{-1}$ tendríamos que $\varepsilon(gh) = \varepsilon(gg^{-1}) = \varepsilon(e) = 1$ lo que es absurdo.

4. *El anillo del grupo de caracteres.*
   Sean $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y G un grupo finito de orden n. Una *función de clase* es una función $G \to \mathbb{C}$ que es constante sobre cada clase de conjugación; las funciones de clase forman un anillo (con la multiplicación de funciones punto a punto) que denotaremos $R(G)$. En particular, los caracteres (trazas de las representaciones) son funciones de clase; es más, toda función de clase es combinación lineal de caracteres. Definimos $\langle \, , \, \rangle : R(G) \otimes R(G) \to \mathbb{K}$ como

$$\langle \phi, \psi\rangle := \frac{1}{n} \sum_{t\in G} \phi(t)\psi(t^{-1}).$$

   Dado que los caracteres forman una base ortonormal de $R(G)$ con respecto a esta forma bilineal, se deduce que $\langle \, , \, \rangle$ es no degenerada y que por lo tanto $R(G)$ admite estructura de álgebra de Frobenius.

Por más ejemplos consultar [7] o [2].

El siguiente resultado nos dice básicamente que la forma de Frobenius es única a menos de multiplicar por un invertible del álgebra.

Lema 1.36. *Si A es un álgebra con forma de Frobenius ε, entonces toda otra forma de Frobenius en A esta dada por precomponer ε con la multiplicación por un elemento invertible del álgebra.*

Demostración: En primer lugar si u es un invertible de A, entonces el mapa $\varepsilon' : A \to \mathbb{K}$ dado por $\varepsilon' = \varepsilon \circ m_u$, con $m_u : A \to A$ definido como $m_u(a) = au$, es también una forma de Frobenius, ya que si bien los núcleos de ambos funcionales no son los mismos, los ideales que ellos contienen deben ser los mismos pues u es invertible.
Recíprocamente, si ε y ε' son dos formas de Frobenius, y λ y λ' los isomorfismos de A-módulos asociados, entonces $\lambda(a) = a.\varepsilon$ y $\lambda'(a) = a.\varepsilon'$ para todo $a \in A$. Como λ y λ' son sobreyectivos, entonces existen $a_0, b_0 \in A$ tales que $\lambda(a_0) = \varepsilon'$ y $\lambda'(b_0) = \varepsilon$. Luego $\varepsilon' = a_0.\varepsilon = a_0.b_0.\varepsilon'$; por lo tanto $a_0b_0 = 1$ y a_0 es invertible.

$\square$

A continuación definiremos una clase importante de álgebras de Frobenius, las álgebras simétricas.

Definición 1.37. Un álgebra de Frobenius es **simétrica** si se verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

1. La forma de Frobenius $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ es *central*; esto significa que $\varepsilon(ab) = \varepsilon(ba)$ para todos $a, b \in A$.

2. La forma bilineal no degenerada $\langle \, , \, \rangle$ es simétrica, es decir $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$ para todos $a, b \in A$.

3. El isomorfismo de A-módulos a izquierda $\lambda : A \to A^*$ es también de A-módulos a derecha.

Observaciones 1.38.

1. Es claro que si A es un álgebra de Frobenius conmutativa, entonces es simétrica.

2. Supongamos que A es un álgebra y que $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ y $\varepsilon' : A \to \mathbb{K}$ son dos formas de Frobenius. Puede pasar que (A, ε) sea un álgebra de Frobenius simétrica y que (A, ε') no sea simétrica.
   Precisamente el siguiente Lema (que enunciaremos sin demostración) deja un poco más en claro esta idea.

Lema 1.39. *Si (A, ε) es un álgebra de Frobenius simétrica (es decir ε es central), toda otra forma de Frobenuis central ε' en A esta dada por $\varepsilon' = \varepsilon \circ m_u$ siendo u un elemento invertible y central del álgebra A.*

Recordar que un elemento en un anillo es llamado central si éste conmuta con todo elemento del anillo.

Ejemplo 1.40. *El álgebra de matrices.*
Sea $A = M_n(\mathbb{K})$ el espacio de todas las matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Éste es un álgebra de Frobenius con el mapa traza

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon = \mathrm{Tr} : & M_n(\mathbb{K}) & \Rightarrow & \mathbb{K} \\ & (a_{ij}) & \to & \sum_i a_{ii} \end{array}$$

Notemos que $(M_n(\mathbb{K}), \mathrm{Tr})$ es un álgebra de Frobenius simétrica ya que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ para todas $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Sin embargo, si precomponemos la traza con la multiplicación por una matriz invertible no central (es decir que no conmuta con todas las matrices) obtenemos un álgebra de Frobenius no simétrica. (ver Lema 1.39). Concretamente, si $A = M_2(\mathbb{R})$ y $U = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ entonces es claro que U es invertible no central. Luego, la forma de Frobenius $\varepsilon' = \mathrm{Tr} \circ m_U$ siendo $m_U : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $m_U(A) = AU$ no es central y por lo tanto $(M_2(\mathbb{R}), \varepsilon')$ no es simétrica.

A continuación enunciaremos un teorema probado por Lowell Abrams y Aaron D. Lauda, el cual nos proporciona otras dos definiciones adicionales de álgebra de Frobenius. Tanto su enunciado como su demostración (que pueden encontarse en [1]) están dados en primera instancia para el caso en que el álgebra A es simétrica, aunque este resultado vale también para el caso no simétrico. De hecho, en el capítulo siguiente probaremos la versión del mismo teorema cuando A es un álgebra diferencial graduada, primero para el caso simétrico y luego para el caso no simétrico. Dado que toda álgebra puede verse como un álgebra diferencial graduada, concentrada en grado cero y con $d = 0$, es que tendremos el resultado clásico del Teorema resuelto en general.

Teorema 1.41. *Un álgebra simétrica A de dimensión finita con producto $m : A \otimes A \to A$ y unidad $u : \mathbb{K} \to A$ es un álgebra de Frobenius si y sólo si se satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*

1. *(Abrams) Existen un coproducto $\Delta : A \to A \otimes A$ y una counidad $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ tales que (A, Δ, ε) es una coálgebra y Δ es morfismo de $A-$bimódulos donde en $A \otimes A$ estamos considerado las acciones de A a izquierda y derecha usuales, es decir: $a.(b \otimes c) = ab \otimes c$ y $(b \otimes c).a = b \otimes ca$ para todos $a, b, c \in A$.*

2. *(Lauda) Existen dos mapas lineales $\theta : \mathbb{K} \to A \otimes A$ (llamado co-pairing) y $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ tales que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1\otimes\theta"] \arrow[d, "\theta\otimes 1"'] & A \otimes A \otimes A \arrow[d, "m\otimes 1"] \\ A \otimes A \otimes A \arrow[r, "1\otimes m"'] & A \otimes A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, "u"] & A \otimes A \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1"] \\ A \otimes A \arrow[r, "1\otimes\varepsilon"'] & A \end{tikzcd}$$

Demostración:

1. Definimos el coproducto de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\lambda"'] & A \otimes A \\ A^* \arrow[r, "m^*"'] & A^* \otimes A^* \arrow[u, "\lambda^{-1}\otimes\lambda^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

   es decir $\Delta := (\lambda^{-1} \otimes \lambda^{-1}) \circ m^* \circ \lambda$, siendo $\lambda : A \to A^*$ el isomorfismo de A-bimódulos y m^* el dual de m.

   Recíprocamente, dada (A, Δ, ε) una coálgebra graduada siendo Δ morfismo de $A-$bimódulos, podemos dotar a A de estructura de Álgebra de Frobenius definiendo la forma bilineal no degenerada asociada $\langle\, ,\, \rangle : A \otimes A \to \mathbb{K}$ como $\langle\, ,\, \rangle = \varepsilon \circ m$.

2. Dado el coproducto Δ definimos $\theta : \mathbb{K} \to A \otimes A$ por $\theta = \Delta \circ u$. Recíprocamente, dado $\theta : \mathbb{K} \to A \otimes A$ definimos $\Delta : A \to A \otimes A$ por

$$\Delta = (1 \otimes m) \circ (\theta \otimes 1) = (m \otimes 1) \circ (1 \otimes \theta).$$

□

En el siguiente teorema, como ya lo hicimos para la forma de Frobenius ε, veremos que si A es un álgebra de Frobenius con coproducto Δ este es único a menos de actuar con un elemento invertible del álgebra.

Teorema 1.42. *Sean (A, Δ, ε) y $(A, \Delta', \varepsilon')$ dos estructuras de Frobenius sobre el álgebra A. Entonces existe $u \in A$ invertible tal que*

$$\varepsilon' = u.\varepsilon, \quad \Delta' = \Delta.u^{-1}$$

donde $\Delta(a).u^{-1} = (\sum a_1 \otimes a_2).u^{-1} = \sum a_1 u^{-1} \otimes a_2$ para todo $a \in A$.

Demostración: En el Lema 1.36 probamos que $\varepsilon' = \varepsilon \circ m_u = u.\varepsilon$ para algún $u \in A$ invertible. Veamos ahora que pasa con los coproductos. Estos están determinados de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\lambda"'] & A \otimes A \arrow[d, "\lambda\otimes\lambda"] \\ A^* \arrow[r, "m^*"'] & A^* \otimes A^* \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta'"] \arrow[d, "\lambda'"'] & A \otimes A \arrow[d, "\lambda'\otimes\lambda'"] \\ A^* \arrow[r, "m^*"'] & A^* \otimes A^* \end{tikzcd}$$

Veamos ahora que $\lambda' = \lambda \circ m_u$. Sea $a \in A$, luego:

$$\lambda'(a) = a.\varepsilon' = a.(u.\varepsilon) = (au).\varepsilon = \lambda(au) = \lambda \circ m_u(a).$$

Entonces, usando la conmutatividad de los diagramas para los coproductos y la igualdad $\lambda' = \lambda \circ m_u$ tenemos que, por un lado

$$(\lambda' \otimes \lambda')\Delta' = m^* \circ \lambda' = m^* \circ \lambda \circ m_u = (\lambda \otimes \lambda) \circ \Delta \circ m_u$$

y por otro lado

$$(\lambda' \otimes \lambda')\Delta' = (\lambda \circ m_u \otimes \lambda \circ m_u)\Delta' = (\lambda \otimes \lambda) \circ (m_u \otimes m_u) \circ \Delta'$$

Por lo tanto

$$(\lambda \otimes \lambda) \circ \Delta \circ m_u = (\lambda \otimes \lambda) \circ (m_u \otimes m_u) \circ \Delta'$$

Como λ es isomorfismo deducimos que $(m_u \otimes m_u)\Delta' = \Delta \circ m_u$.
Utilizando que u es invertible, podemos componer de los dos lados de la igualdad por $m_{u^{-1}} \otimes m_{u^{-1}}$ y obtenemos que

$$\Delta'(a) = (m_{u^{-1}} \otimes m_{u^{-1}})\Delta \circ m_u(a) = (m_{u^{-1}} \otimes m_{u^{-1}})\Delta(au)$$

Como el morfismo Δ es de A-bimódulos tenemos que

$$\Delta(au) = (1 \otimes m)(\Delta \otimes 1)(a \otimes u) = (1 \otimes m_u)\Delta(a)$$

y por lo tanto

$$\Delta'(a) = (m_{u^{-1}} \otimes m_{u^{-1}})(1 \otimes m_u)\Delta(a) = (m_{u^{-1}} \otimes 1)\Delta(a)$$

y eso vale para todo $a \in A$. Entonces

$$\Delta' = (m_{u^{-1}} \otimes 1)\Delta = \Delta.u^{-1}$$

lo que concluye la prueba. □

Ejemplo 1.43. En el siguiente ejemplo ilustraremos el resultado anterior.
Sea $A = \dfrac{\mathbb{K}[x, y]}{(x^2 - 1, y^2 - 1, xyx - yxy)}$. Consideremos los siguientes mapas lineales

$\varepsilon(1_A) = 1$ y cero en otro caso,
$\Delta(1_A) = 1_A \otimes 1_A + x \otimes x + y \otimes y + xy \otimes yx + yx \otimes xy + xyx \otimes xyx.$

$\varepsilon'(x) = 1$ y cero en otro caso,
$\Delta'(1_A) = 1 \otimes x + x \otimes 1 + y \otimes xy + xy \otimes xyx + yx \otimes y + xyx \otimes yx.$

Como queremos que Δ y Δ' le den a A estructuras de Frobenius, estos deberán ser morfismos de bimódulos, por lo tanto extendemos Δ y Δ' a todo A del siguiente modo

$$\Delta(x) = (x \otimes 1_A)\Delta(1_A) = \Delta(1_A)(1_A \otimes x)$$

y análogamente para Δ'.

Luego (A, Δ, ε) y $(A, \Delta', \varepsilon')$ son dos estructuras de Frobenius sobre A y se cumple que $\varepsilon' = x.\varepsilon$ y $\Delta' = \Delta.x^{-1}$ siendo $x^{-1} = x$ pues $x^2 = 1$.

1.3.1 Automorfismos de Nakayama

A continuación dada A un álgebra de Frobenius presentaremos un par de resultados sobre la existencia de ciertos automorfismos asociados al álgebra, llamados *automorfismos de Nakayama* y que serán escenciales para futuras consideraciones.
Denotaremos por $\mathrm{Aut}(A)$ al conjunto de automorfismos del álgebra A.
Comenzaremos con la siguiente proposición probada por Nakayama en [2].

Proposición 1.44. *Sea A un álgebra de Frobenius sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $\langle\ ,\ \rangle : A \otimes A \to \mathbb{K}$ la forma bilineal asociada. Luego, existe $\nu \in \mathrm{Aut}(A)$ tal que*

$$\langle \nu(a), b\rangle = \langle b, a\rangle,$$

para todos $a, b \in A$.

Demostración: Sea $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ una base del espacio vectorial A. Queremos encontrar un elemento $x \in A$ tal que para todo $a \in A$ se cumpla que $\langle x, -\rangle = \langle -, a\rangle$ como $\mathbb{K}$-formas lineales de A en $\mathbb{K}$. Sean $a = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j$, $x = \sum_{l=1}^{n} x_l a_l$ y $P = (p_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ la matriz asociada a la forma bilineal, es decir $p_{ij} = \langle a_i, a_j\rangle$ para todos $i, j \in \{1, \cdots, n\}$. Como $\langle\ ,\ \rangle$ es no degenerada P es invertible (ver Observación 1.6). Para $i \in \{1, \cdots, n\}$ tenemos las siguientes igualdades

$$\langle a_i, a\rangle = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \langle a_i, a_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \xi_j p_{ij},$$

$$\langle x, a_i\rangle = \sum_{l=1}^{n} x_l \langle a_l, a_i\rangle = \sum_{l=1}^{n} x_l p_{li}.$$

La condición $\langle x, -\rangle = \langle -, a\rangle$ es claramente equivalente a la condición $\langle a_i, a\rangle = \langle x, a_i\rangle$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, y a su vez equivalente a las siguientes igualdades:

$$\sum_{l=1}^{n} x_l p_{li} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j p_{ij} \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Ya que P es invertible concluimos, por el Teorema de Cramer, que existe exactamente una solución $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2, \cdots$, $x_n = \lambda_n$ al sistema de ecuaciones lineales de arriba. Luego, definiendo $\nu(a) = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l a_l$, se satisface la igualdad deseada $\langle \nu(a), -\rangle = \langle -, a\rangle$. Además, es claro que $\nu : A \to A$ es un morfismo lineal. Es más, es un monomorfismo por la no degeneración de $\langle\ ,\ \rangle$ y por lo tanto un isomorfismo, puesto que estamos en dimensión finita. Para cada $a, b, c \in A$ tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\langle \nu(ab), c\rangle &= \langle c, ab\rangle = \langle ca, b\rangle = \langle \nu(b), ca\rangle = \langle \nu(b)c, a\rangle \\ &= \langle \nu(a), \nu(b)c\rangle = \langle \nu(a)\nu(b), c\rangle.\end{aligned}$$

Luego $\langle \nu(ab) - \nu(a)\nu(b), -\rangle = 0$ y por lo tanto, por la no degeneración de $\langle\ ,\ \rangle$ deducimos que $\nu(ab) = \nu(a)\nu(b)$. En particular, si $a = \nu^{-1}(1_A)$ y $b = 1_A$ obtenemos que

$$\nu(1_A) = \nu(a)\nu(1_A) = \nu(a1_A) = \nu(a) = 1_A,$$

por lo que $\nu : A \to A$ resulta un isomorfismo de álgebras. □

Definición 1.45. Sea A un álgebra de Frobenius y $\langle \, , \rangle : A \otimes A \to \mathbb{K}$ una forma bilineal no degenerada asociada. Un **automorfismo de Nakayama** asociado a $\langle \, , \rangle$ es un automorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\nu : A \to A$ que verifica $\langle \nu(a), b \rangle = \langle b, a \rangle$ para todos $a, b \in A$.

Los siguientes resultados nos dicen que un automorfismo de Nakayama de un álgebra de Frobenius A es único a menos de componer con un automorfismo interno de A. En particular si A es simétrica, el morfismo id_A será un automorfismo de Nakayama y por lo tanto todo automorfismo de Nakayama será interno. Las demostraciones se pueden encontrar en [2].

Lema 1.46. *Sea A un álgebra de Frobenius sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $\langle \, , \rangle : A \otimes A \to \mathbb{K}$ una forma bilineal no degenerada asociada, ν el automorfismo de Nakayama asociado a $\langle \, , \rangle$ y $c \in A$ un elemento invertible. Entonces el mapa $\nu' : A \to A$ definido por $\nu'(a) = \nu(cac^{-1})$ para todo $a \in A$, es un automorfismo de Nakayama de A asociado a la forma bilineal no degenerada $\langle \, , \rangle' : A \otimes A \to \mathbb{K}$ dado por $\langle b, a \rangle' = \langle b, ac^{-1} \rangle$ para todos $a, b \in A$.*

Proposición 1.47. *Sea A un álgebra de Frobenius sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $\langle \, , \rangle_1$ y $\langle \, , \rangle_2$ dos formas bilineales no degeneradas asociadas a A, y ν_1 y ν_2 los automorfimos de Nakayama asociados a las formas bilineales, respectivamente. Entonces, existe un elemento invertible $c \in A$ tal que $\nu_2(a) = \nu_1(cac^{-1})$ para todo $a \in A$.*

Corolario 1.48. *Sea A un álgebra de Frobenius sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es simétrica.*
2. *Todo automorfismo de Nakayama de A es interno.*
3. *Existe un automorfismo de Nakayama de A que es interno.*

Capítulo 2

Álgebras de Frobenius en la categoría adg.

2.1 Definiciones clásicas de Álgebras de Frobenius en la categoría adg.

Fijemos un cuerpo $\mathbb{K}$ de característica cero y $A = \{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ un álgebra diferencial graduada (adg). El propósito de este capítulo es definir lo que será un álgebra de Frobenius en la categoría de las álgebras diferenciales graduadas, tomando como base las definiciones clásicas que se tiene de álgebra de Frobenius cuando estamos sobre una $\mathbb{K}$-álgebra A, las cuales fueron desarrolladas muy brevemente en el capítulo anterior.

Definición 2.1. Dada $\beta : (A \otimes A, d) \to (\mathbb{K}, d)$ morfismo de complejos, decimos que β es:

- una **forma bilineal no degenerada** si $\beta_0 : (A \otimes A)_0 = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i \otimes A_{-i} \to \mathbb{K}$ es de la forma $\beta_0 = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \langle\, , \rangle_i$, donde para cada $i \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\langle\, , \rangle_i : A_i \otimes A_{-i} \to \mathbb{K}$ es una forma bilineal no degenerada.

- **asociativo**, si se cumple que

$$\langle a_i b_j, c_{-(i+j)} \rangle_{i+j} \;=\; \langle a_i, b_j c_{-(i+j)} \rangle_i$$

  $\forall a_i \in A_i, b_j \in A_j$ y $c_{-(i+j)} \in A_{-(i+j)}$.

Observación 2.2. Se tiene que $\beta_i = 0 \; \forall i \neq 0$ y $\beta_0 d = 0$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & (A\otimes A)_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\beta_1=0"'] & (A\otimes A)_0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\beta_0"'] & (A\otimes A)_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{-1}=0"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & \mathbb{K} \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Definición 2.3. Dada (A, d) un adg, decimos que A es un **álgebra de Frobenius**, si es de dimensión finita, de tipo finito y viene equipada con un morfismo de complejos $\beta : (A \otimes A, d) \to (\mathbb{K}, d)$ que es además una forma bilineal no degenerada y asociativa.

Proposición 2.4. *Sea (A, d) un adg de dimensión finita y de tipo finito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *(A, d) es un álgebra de Frobenius.*

2. *Existe un mapa $\varepsilon : (A,d) \to (\mathbb{K},d)$ morfismo de complejos tal que* $\mathrm{Ker}(\varepsilon_0) \subset A_0$ *no contiene ideales a izquierda no triviales.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varepsilon_1=0"'] & A_0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varepsilon_0"'] & A_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{-1}=0"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] & \mathbb{K} \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

El morfismo ε se denomina forma de Frobenius.

3. *Existe un isomorfismo de A-módulos a izquierda $\lambda : (A,d) \to (A^*,d)$.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & A_0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\lambda_0"'] & A_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A,\mathbb{K})_1 \arrow[r, "d"] & \mathrm{Hom}(A,\mathbb{K})_0 \arrow[r, "d"] & \mathrm{Hom}(A,\mathbb{K})_{-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

4. *Existe un mapa $\varepsilon' : (A,d) \to (\mathbb{K},d)$ morfismo de complejos tal que* $\mathrm{Ker}(\varepsilon'_0) \subset A_0$ *no contiene ideales a derecha no triviales.*

5. *Existe un isomorfismo de A-módulos a derecha $\lambda' : (A,d) \to (A^*,d)$.*

Demostración:

- (2) $\Rightarrow$ (1) Definimos $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ por:

$$\beta_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq 0 \\ \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \langle\,,\rangle_j & \text{si} \quad i = 0 \end{cases}$$

donde para cada $j \in \mathbb{Z}$ se define

$$\langle a_j, b_{-j}\rangle_j = \varepsilon_0(a_j b_{-j}) \quad \forall a_j \in A_j, b_{-j} \in A_{-j}.$$

Es claro que β es una forma bilineal asociativa, dado que ε_0 es lineal y el producto del álgebra es asociativo.
Veamos que β es no degenerada. Para esto, alcanza con probar que, para cada $j \in \mathbb{Z}$ $\langle\,,\rangle_j$, es no degenerada a izquierda (ver Proposición 1.17), es decir:

$$\text{si } \langle a_j, b_{-j}\rangle_j = 0 \,\forall a_j \in A_j \Rightarrow b_{-j} = 0.$$

Como $0 = \langle a_j, b_{-j}\rangle_j = \varepsilon_0(a_j b_{-j})\ \forall a_j \in A_j$, entonces $\varepsilon_0(A_j b_{-j}) = 0$. Luego $A_j b_{-j} \subset A_0$ es un ideal a izquierda contenido en el $\ker(\varepsilon_0)$. Como $\ker(\varepsilon_0)$ no contiene ideales a izquierda no triviales, se deduce que $b_{-j} = 0$.

Resta probar que β es morfismo de complejos, i.e $\beta_0 d = 0$.
Sea $a \otimes a' \in (A \otimes A)_1$. Luego:

$$\begin{aligned}
\beta_0(d(a\otimes a')) &= \beta_0(da \otimes a' + (-1)^{|a|} a \otimes d(a')) = \beta_0(da\otimes a') + (-1)^{|a|}\beta_0(a \otimes d(a')) \\
&= \varepsilon_0(d(a)a') + (-1)^{|a|}\varepsilon_0(ad(a')) = \varepsilon_0(d(a)a' + (-1)^{|a|} ad(a')) \\
&= \varepsilon_0(d(aa')) = (\varepsilon_0 d)(aa') = 0.
\end{aligned}$$

- (2) $\Rightarrow$ (3) Dado ε, definimos $\lambda : A \to A^*$ por:

$$\lambda(a)(b) := (-1)^{|a|.|b|}\varepsilon(ba) \quad \forall a, b \in A.$$

Veamos en primer lugar que: $\lambda(ab) = a.\lambda(b)$.
Sea $c \in A$ arbitrario. Luego

$$\lambda(ab)(c) = (-1)^{|ab|.|c|}\varepsilon(cab).$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}(a.\lambda(b))(c) &= (-1)^{|a|(|\lambda(b)|+|c|)}\lambda(b)(ca) = (-1)^{|a|(|b|+|c|)}(-1)^{|b||ca|}\varepsilon(cab)\\ &= (-1)^{|c|(|a|+|b|)}\varepsilon(cab) = (-1)^{|c||ab|}\varepsilon(cab)\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos que $|\lambda| = 0$.

De lo anterior obtenemos la igualdad deseada $\lambda(ab)(c) = (a.\lambda(b))(c)$.

En segundo lugar, veamos que λ es isomorfismo, es decir para cada $i \in \mathbb{Z}$, $\lambda_i : A_i \to \mathrm{Hom}(A, \mathbb{K})_i$ definido por:

$$\lambda_i(a_i)(b_{-i}) := (-1)^{|a_i|.|b_{-i}|}\varepsilon_0(b_{-i}a_i) \quad \forall a_i \in A_i, b_{-i} \in A_{-i} \tag{2.1}$$

es un isomorfismo.

Como para cada i se tiene que $A^*_{-i} \simeq \mathrm{Hom}(A, \mathbb{K})_i$ y $\dim A_i = \dim A_{-i} = \dim A^*_{-i}$, alcanza con probar que λ_i es inyectivo.
Si $\lambda_i(a_i) = 0$, entonces $\lambda_i(a_i)(b_{-i}) = 0$ $\forall b_{-i} \in A_{-i}$. Por definición de λ_i, resulta que $\varepsilon_0(b_{-i}a_i) = 0$ $\forall b_{-i} \in A_{-i}$, o dicho de otro modo, $\varepsilon_0(A_{-i}a_i) = 0$. Como $A_{-i}a_i \subset A_0$ es un ideal a izquierda contenido en el $\ker \varepsilon_0$, éste tiene que ser trivial, y por lo tanto $a_i = 0$, lo que prueba la inyectividad de λ_i.

Por último, veamos que λ es morfismo de complejos, es decir $\lambda d = d\lambda$.
Para ésto, sean $a, b \in A$, queremos probar que $\lambda(d(a))(b) = d(\lambda(a)(b))$. Si $|a| = i$ entonces $|d(a)| = i - 1$, por lo que si $|b| \neq -i + 1$, la igualdad anterior se cumple, dado que ambos miembros dan cero. Supongamos entonces que $|b| = -i + 1$. Luego, por un lado tenemos que:

$$\lambda(d(a))(b) = (-1)^{|d(a)|.|b|}\varepsilon(bd(a)) = (-1)^{-i^2+2i-1}\varepsilon(bd(a))$$

Por otro lado, recordando que λ es un mapa lineal de grado cero, tenemos:

$$\begin{aligned}d(\lambda(a)(b)) &= d_{\mathbb{K}}(\lambda(a)(b)) - (-1)^{|\lambda(a)|}\lambda(a)(d(b)) = -(-1)^{|a|}(-1)^{|a|.|d(b)|}\varepsilon(d(b)a)\\ &= -(-1)^{i-i^2}\varepsilon(d(b)a) = (-1)^{-i^2+i+1}\varepsilon(d(b)a).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la igualdad deseada se cumple si y sólo si:

$$(-1)^{-i^2+2i-1}\varepsilon(bd(a)) = (-1)^{-i^2+i+1}\varepsilon(d(b)a) \Leftrightarrow \varepsilon(bd(a)) = (-1)^i\varepsilon(d(b)a).$$

Para terminar la prueba probemos entonces esta última igualdad:

$$\varepsilon(bd(a)) = (-1)^i\varepsilon(d(b)a).$$

Calculemos $\varepsilon(d(ba))$:

$$\varepsilon(d(ba)) = \varepsilon(d(b)a) + (-1)^{|b|}\varepsilon(bd(a)) = \varepsilon(d(b)a) + (-1)^{-i+1}\varepsilon(bd(a)).$$

Ahora como $\varepsilon(d(ba)) = \varepsilon_0(d(ba)) = 0$, pues teníamos $\varepsilon_0 d = 0$, resulta que:

$$0 = \varepsilon(d(b)a) + (-1)^{-i+1}\varepsilon(bd(a)),$$

por lo que despejando $\varepsilon(bd(a))$ de esta última igualdad obtenemos:

$$\varepsilon(bd(a)) = (-1)^i \varepsilon(d(b)a)$$

como queríamos.

- (1)$\Rightarrow$ (2) Dado $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ definimos $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ por:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq 0 \\ \langle 1_A, - \rangle_0 = \langle -, 1_A \rangle_0 & \text{si} \quad i = 0 \end{cases}$$

Dicho de otra forma, $\varepsilon_0(a) = \langle 1_A, a \rangle_0 = \langle a, 1_A \rangle_0$ $\forall a \in A$, siendo 1_A la unidad de A.
Es claro que ε es lineal, dado que β es bilineal.
Veamos entonces, que $\ker(\varepsilon_0)$ no contiene ideales a izquierda no triviales. Para esto, alcanza con probar que $\ker(\varepsilon_0)$ no contiene ideales principiales a izquierda no triviales.
Si $\varepsilon_0(A_{-i}a_i) = 0$, $a_i \in A_i$, entonces por definición de ε_0 resulta que $\langle 1_A, b_{-i}a_i \rangle_0 = 0$, $\forall b_{-i} \in A_{-i}$. Dado que β es asociativo, de lo anterior se deduce que

$$0 = \langle 1_A b_{-i}, a_i \rangle_{-i} = \langle b_{-i}, a_i \rangle_{-i} \quad \forall b_{-i} \in A_{-i}.$$

Ahora, como $\langle\, , \rangle_{-i}$ es no degenerada a izquierda, debe ser $a_i = 0$ como queríamos.

Por último, resta ver que $\varepsilon_0 d = 0$. Sea $a_1 \in A_1$ arbitrario. Luego:

$$\varepsilon_0 d(a_1) = \langle 1_A, d(a_1) \rangle_0 = \beta_0(1_A \otimes d(a_1)).$$

Por otro lado,

$$d(1_A \otimes a_1) = d(1_A) \otimes a_1 + (-1)^{|1_A|} 1_A \otimes d(a_1) = 1_A \otimes d(a_1)$$

y además sabíamos que $\beta_0 d = 0$. Por lo que

$$0 = \beta_0 d(1_A \otimes a_1) = \beta_0(1_A \otimes d(a_1)) = \varepsilon_0 d(a_1)$$

como queríamos.

- (3) $\Rightarrow$ (1) Dado $\lambda : A \to A^*$, definimos $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ por:

$$\beta_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq 0 \\ \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \langle\, , \rangle_j & \text{si} \quad i = 0 \end{cases}$$

donde para cada $j \in \mathbb{Z}$ se define

$$\langle a_j, b_{-j} \rangle_j = \lambda(1_A)(a_j b_{-j}) \quad \forall a_j \in A_j, b_{-j} \in A_{-j}.$$

En primer lugar, es claro que β es bilineal ya que λ es lineal y β es asociativo pues el producto del álgebra lo es.
En segundo lugar, veamos que β es no degenerada a izquierda. Para esto probemos que para cada $i \in \mathbb{Z}$, $\langle\, ,\rangle_i$ es no degenerada a izquierda. Sea $b_{-i} \in A_{-i}$ fijo, si $\langle a_i, b_{-i} \rangle_i = 0$ $\forall a_i \in A_i$ resulta que $\lambda(1_A)(a_i b_{-i}) = 0$, $\forall a_i \in A_i$. Multiplicando esta última igualdad por $(-1)^{|b_{-i}|(|\lambda(1_A)|+|a_i|)}$ obtenemos que:

$$0 = (-1)^{|b_{-i}|(|\lambda(1_A)|+|a_i|)}\lambda(1_A)(a_i b_{-i}) = (b_{-i}.\lambda(1_A))(a_i) = \lambda(b_{-i})(a_i) \quad \forall a_i \in A_i,$$

por lo que $\lambda(b_{-i}) = 0$. Ahora, como λ es inyectivo, tiene que ser $b_{-i} = 0$, lo que demuestra la no degeneración a izquierda de $\langle\, ,\rangle_i$.
Por último, veamos que β es morfismo de complejos, es decir $\beta_0 d = 0$. Sea $a \otimes a' \in (A \otimes A)_1$. Luego:

$$\begin{aligned}\beta_0 d(a \otimes a') &= \beta_0(d(a) \otimes a' + (-1)^{|a|} a \otimes d(a')) = \langle d(a), a' \rangle + (-1)^{|a|}\langle a, d(a') \rangle \\ &= \lambda(1_A)(d(a)a') + (-1)^{|a|}\lambda(1_A)(ad(a')) = \lambda(1_A)(d(aa')).\end{aligned}$$

Veamos entonces que $\lambda(1_A)(d(aa')) = 0$, de donde se deduce lo que queremos.
Dado que λ es morfismo de complejos, resulta que

$$d(\lambda(aa'))(1_A) = \lambda(d(aa'))(1_A).$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad de arriba, obtenemos que:

$$d(\lambda(aa'))(1_A) = d_{\mathbb{K}}(\lambda(aa')(1_A)) + (-1)^{|a|+|a'|}\lambda(aa')(d(1_A)) = 0.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}0 &= \lambda(d(aa'))(1_A) = (d(aa').\lambda(1_A))(1_A) = (-1)^{|d(aa')|(|\lambda(1_A)|+|1_A|)}\lambda(1_A)(1_A d(aa')) \\ &= \lambda(1_A)(d(aa')),\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $|\lambda(1_A)| + |1_A| = 0$.

- (4)$\Rightarrow$ (1) La prueba es análoga a lo que hicimos para probar (2) $\Rightarrow$ (1), salvo que para probar la no degeneración de β se prueba que para cada $i \in \mathbb{Z}$, $\langle\, ,\rangle_i$ es no degenerada a derecha. Recordemos que la condición de no degeneración a derecha e izquierda son equivalentes pues estamos en dimensión finita.

- (4) $\Rightarrow$ (5) Definimos $\lambda' : A \to A^*$ por:

$$\lambda'(a)(b) = \varepsilon'(ab) \quad \forall a, b \in A.$$

- (1) $\Rightarrow$ (4) Definimos

$$\varepsilon'_0(a) = \langle a, 1_A \rangle_0 = \langle 1_A, a \rangle_0 \quad \forall a \in A.$$

- (5) $\Rightarrow$ (1) Es análoga a la prueba de que (3) $\Rightarrow$ (1), salvo que se prueba la no degeneración a derecha de β.

Esto concluye la demostración de la proposición. $\square$

Observación 2.5. De la proposición anterior se deduce que si (A, d) es un álgebra de Frobenius, entonces

$$\varepsilon = \varepsilon',$$

lo que no es novedoso, ya que dado que la no degeneración a izquierda y derecha son equivalentes y $\langle a, b\rangle = \varepsilon(ab)$ para todos $a, b \in A$, entonces el $\ker(\varepsilon_0)$ no contiene ideales a derecha no triviales si y sólo si $\ker(\varepsilon_0)$ no contiene ideales a izquierda no triviales.

Definición 2.6. Un **morfismo de álgebras diferenciales graduadas de Frobenius** es un morfismo de álgebras diferenciales graduadas $f : (A, d) \to (B, d)$ que es además un morfismo de Frobenius.

Notación 2.7. De ahora en más, usaremos la terminología álgebra de Frobenius para referirnos a un adg que es además un álgebra de Frobenius.

Definición 2.8. Dada (A, d) un álgebra de Frobenius, decimos que A es **simétrica**, si

$$\varepsilon(ab) = (-1)^{|a||b|}\varepsilon(ba) \quad \forall a, b \in A.$$

Teorema 2.9. *Sea (A, d) un álgebra de Frobenius simétrica. Entonces la forma bilineal β es simétrica, es decir $\langle a, b\rangle = (-1)^{|a||b|}\langle b, a\rangle$, $\lambda = \lambda'$ y resulta que λ es morfismo de A-bimódulos.*

Demostración: Es claro que β es simétrica, pues

$$\langle a, b\rangle = \varepsilon(ab) = (-1)^{|a||b|}\varepsilon(ba) = (-1)^{|a||b|}\langle b, a\rangle.$$

Para probar que $\lambda = \lambda'$, sean $a, b \in A$, luego

$$\lambda(a)(b) = (-1)^{|a||b|}\varepsilon(ba) = \varepsilon(ab) = \lambda'(a)(b).$$

Dado que λ es isomorfismo de A-módulos a izquierda, λ' es isomorfismo de A-módulos a derecha, y $\lambda = \lambda'$ se deduce que λ es isomorfismo de A-bimódulos. $\square$

2.2 Definiciones de Abrams y Lauda para la categoría adg.

A continuación veremos dos definiciones adicionales de álgebra de Frobenius para un adg A, equivalentes a las ya vistas (las definiciones clásicas de Abram y Lauda pueden encontrarse en [1]), en primer lugar para el caso en que el álgebra A es simétrica. Luego veremos que también se tienen los mismos resultados cuando quitamos la hipótesis de simetría del álgebra. También probaremos que si A tiene estructura de álgebra de Frobenius, ésta es única a menos de multiplicar por un invertible del álgebra.

Teorema 2.10. *Sea (A, d) un adg simétrica de dimensión finita y de tipo finito. Entonces A es un álgebra de Frobenius si y sólo si ésta satisface alguna de las siguientes condiciones:*

1. *(Abrams) Existen un coproducto $\Delta : (A, d) \to (A \otimes A, d)$ y una counidad $\varepsilon : (A, d) \to \mathbb{K}$ morfismos de complejos, tales que (A, Δ, ε) es una coálgebra graduada y Δ es un morfismo de $A-$bimódulos donde en $A \otimes A$ estamos considerado las acciones de A a izquierda y derecha usuales, es decir: $a.(b \otimes c) = ab \otimes c$ y $(b \otimes c).a = b \otimes ca$ para todos $a, b, c \in A$.*

2. *(Lauda) Existen un co-pairing $\theta : (\mathbb{K}, d) \to (A \otimes A, d)$ y $\varepsilon : (A, d) \to (\mathbb{K}, d)$ morfismos de complejos tales que los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1\otimes\theta"] \arrow[d, "\theta\otimes 1"'] & A\otimes A\otimes A \arrow[d, "m\otimes 1"] \\ A\otimes A\otimes A \arrow[r, "1\otimes m"'] & A\otimes A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, "u"] & A\otimes A \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1"] \\ A\otimes A \arrow[r, "1\otimes\varepsilon"'] & A \end{tikzcd}$$

siendo $u : \mathbb{K} \to A$ la unidad del álgebra.

Demostración:

1. (Abrams) Veamos que si A es un álgebra de Frobenius, y $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ es la forma de Frobenius, podemos definir un coproducto $\Delta : A \to A \otimes A$ de forma tal que (A, Δ, ε) sea una coálgebra graduada. En particular, la counidad es la forma de Frobenius del álgebra A. Definimos $\Delta = \{\Delta_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, donde para cada $i \in \mathbb{Z}$, Δ_i viene dado por:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "\Delta_i"] \arrow[d, "\lambda_i"'] & & \bigoplus_{j+l=i} A_j \otimes A_l \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A,\mathbb{K})_i \arrow[r, "m^*"'] & \bigoplus_{j+l=i} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A,\mathbb{K})_j \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A,\mathbb{K})_l \arrow[ur, "\bigoplus_{j+l=i} \lambda_j^{-1}\otimes\lambda_l^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

donde λ_i es el dado en la ecuación 2.1, y m^* es el mapa dual de $m : A \otimes A \to A$, siendo m el producto del álgebra.

Es claro que Δ morfismo de complejos, pues es composición de morfismos de complejos (ver Observación 1.19).
A continuación veamos que (A, Δ, ε) nos da una estructura de coálgebra graduada, es decir se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & A\otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes 1"] \\ A\otimes A \arrow[r, "1\otimes\Delta"'] & A\otimes A\otimes A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\otimes\mathbb{K} & A\otimes A \arrow[l, "1\otimes\varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon\otimes 1"] & \mathbb{K}\otimes A \\ & A \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\simeq"'] \arrow[ul, phantom, "2"] \arrow[ur, phantom, "3"] & \end{tikzcd}$$

Comencemos probando la conmutatividad del diagrama (2). La conmutatividad del diagrama (3) es análoga.
La conmutatividad del diagrama (2) es equivalente a probar para cada $i \in \mathbb{Z}$, la conmutatividad del correspondiente diagrama en grado i. Sea $i \in \mathbb{Z}$ fijo y $a_i \in A_i$ arbitrario. Luego:

$$\Delta_i(a_i) = \sum_{j+l=i} (\lambda_j^{-1}\otimes\lambda_l^{-1})(\lambda_i(a_i)\circ m) = \sum_{j+l=i} (\lambda_j^{-1}\otimes\lambda_l^{-1})(\sum_{j+l=i} f_j\otimes f_l) = \sum_{j+l=i} \lambda_j^{-1}(f_j)\otimes\lambda_l^{-1}(f_l),$$

siendo $f_s \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{K})_s$ para cada $s \in \mathbb{Z}$. Entonces, resulta que:

$$\begin{aligned}(1\otimes\varepsilon)\Delta_i(a_i) &= \sum_{j+l=i}\lambda_j^{-1}(f_j)\varepsilon_l(\lambda_l^{-1}(f_l)) = \lambda_i^{-1}(f_i)\varepsilon_0(\lambda_0^{-1}(f_0)) = \lambda_i^{-1}(f_i)\lambda_0(\lambda_0^{-1}(f_0))(1_A)\\ &= \lambda_i^{-1}(f_i)f_0(1_A),\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos que $\varepsilon_l = 0\ \forall l \neq 0$. Luego

$$\lambda_i^{-1}(f_i)f_0(1_A) = a_i \Leftrightarrow f_i f_0(1_A) = \lambda_i(a_i) \in \mathrm{Hom}(A,\mathbb{K})_i \simeq A^*_{-i}.$$

Sea $b_{-i} \in A_{-i}$ arbitrario. Como $f_l(1_A) = 0\ \forall l \neq 0$ entonces:

$$f_i(b_{-i})f_0(1_A) \cong f_i(b_{-i})\otimes f_0(1_A) = \left(\sum_{j+l=i} f_j\otimes f_l\right)(b_{-i}\otimes 1_A) = (\lambda_i(a_i)\circ m)(b_{-i}\otimes 1_A) = \lambda_i(a_i)(b_{-i})$$

de lo que se deduce lo que queríamos.

La conmutatividad del diagrama (1) es la propiedad de coasocitividad del coproducto Δ. Para probar ésta propiedad vamos a usar el resultado (que demostraremos a continuación), si Δ es morfismo de A-bimódulos, entonces es coasociativo.
Si Δ es morfismo de A-bimódulos los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "1\otimes\Delta"'] \arrow[dr, phantom, "4"] & A \arrow[d, "\Delta"] \\ A\otimes A\otimes A \arrow[r, "m\otimes 1"'] & A\otimes A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\Delta\otimes 1"'] \arrow[dr, phantom, "5"] & A \arrow[d, "\Delta"] \\ A\otimes A\otimes A \arrow[r, "1\otimes m"'] & A\otimes A \end{tikzcd}$$

El diagrama (4) nos da la condición para que Δ sea morfismo de A-módulo a izquierda, y el diagrama (5) la condición para que sea morfismo de A-módulo a derecha.

Veamos entonces que de la conmutatividad de los diagramas (4) y (5) se deduce la coasociatividad de Δ. Para ésto, sea $a \in A$, $|a| = i$, $\Delta(a) = \sum_k c_{i-k}\otimes b_k$ y $\Delta(1_A) = \sum_j u_j\otimes e_{-j}$. Entonces, por la conmutatividad del diagrama (4), tenemos que:

$$\begin{tikzcd} b_k\otimes 1_A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "1\otimes\Delta"'] & b_k \arrow[d, "\Delta"] \\ b_k\otimes\sum_j u_j\otimes e_{-j} \arrow[r, "m\otimes 1"'] & \sum_j b_k u_j\otimes e_{-j} \end{tikzcd}$$

es decir $\Delta(b_k) = \sum_j b_k u_j \otimes e_{-j}$.

Luego:

$$(1\otimes\Delta)\circ\Delta(a) = (1\otimes\Delta)(\sum_k c_{i-k}\otimes b_k) = \sum_k c_{i-k}\otimes\Delta(b_k) = \sum_{k,j} c_{i-k}\otimes b_k u_j\otimes e_{-j}. \quad (*)$$

De la conmutatividad del diagrama (5), resulta que:

$$\begin{tikzcd} a \otimes u_j \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\Delta\otimes 1"'] & au_j \arrow[d, "\Delta"] \\ \sum_k c_{i-k} \otimes b_k \otimes u_j \arrow[r, "1\otimes m"'] & \sum_k c_{i-k} \otimes b_k u_j \end{tikzcd}$$

es decir $\Delta(au_j) = \sum_k c_{i-k} \otimes b_k u_j$.

Entonces:

$$(*) = \sum_j \Delta(au_j) \otimes e_{-j} = (\Delta \otimes 1)(\sum_j au_j \otimes e_{-j}). \quad (**)$$

Nuevamente, por la conmutatividad del diagrama (4), deducimos que:

$$\begin{tikzcd} a \otimes 1_A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "1\otimes\Delta"'] & a \arrow[d, "\Delta"] \\ a \otimes \sum_j u_j \otimes e_{-j} \arrow[r, "m\otimes 1"'] & \sum_j au_j \otimes e_{-j} \end{tikzcd}$$

es decir $\Delta(a) = \sum_j au_j \otimes e_{-j}$.

Finalmente: $(**) = (\Delta \otimes 1) \circ \Delta(a)$, lo que prueba la coasociatividad de Δ.

Para concluir, solo resta probar que Δ es efectivamente morfismo de A-bimódulos. A tales efectos, definimos el mapa

$$\begin{array}{rccc} \overline{m}: & A & \longrightarrow & \mathrm{End}(A) \\ & a & \longrightarrow & a. \end{array} \tag{2.2}$$

donde $a.(b) = ab$, $\forall b \in A$. Más explicitamente, si $|a| = i$, entonces $a. = \{a.^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, siendo $a.^j \in \mathrm{Hom}(A_j, A_{i+j})$, $a.^j(b) = ab$, $\forall b \in A_j$. Por lo tanto, podemos pensar que para cada $i \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rccc} \overline{m}: & A_i & \longrightarrow & \bigoplus_j \mathrm{Hom}(A_j, A_{i+j}) \\ & a & \longrightarrow & \bigoplus_j a.^j \end{array} \tag{2.3}$$

Se prueba fácilmente que $\overline{m}$ es morfismo de complejos.

Además, dado que $\dim(A_j) < \infty$ $\forall j \in \mathbb{Z}$, tenemos para cada $j \in \mathbb{Z}$ fijo, el isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} A_{i+j} \otimes A_j^* & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A_j, A_{i+j}) \\ b \otimes f & \longrightarrow & f(-)b \end{array} \tag{2.4}$$

donde $[f(-)b](b_j) = f(b_j)b$ $\forall b_j \in A_j$.

Entonces, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, phantom, "6"] & A^*_{-i} \arrow[rr, "\lambda^{-1}"] \arrow[d, "m^*"'] \arrow[drr, phantom, "7"] & & A_i \arrow[d, "\overline{m}"] \\
\bigoplus_j A_{i+j} \otimes A_{-j} \arrow[r, "\lambda\otimes\lambda"'] & \bigoplus_j A^*_{-(i+j)} \otimes A^*_j \arrow[r, "\lambda^{-1}\otimes 1^*"'] & \bigoplus_j A_{i+j} \otimes A^*_j \arrow[r, "\simeq"'] & \bigoplus_j \operatorname{Hom}(A_j, A_{i+j})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[drr, "\overline{m}"] \arrow[dr, phantom, "8"] & & \\
\bigoplus_j A_{i+j} \otimes A_{-j} \arrow[r, "1\otimes\lambda"'] & \bigoplus_j A_{i+j} \otimes A^*_j \arrow[r, "\simeq"'] & \bigoplus_j \operatorname{Hom}(A_j, A_{i+j})
\end{tikzcd}$$

donde estamos usando que $\forall s \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{K})_s \simeq A^*_{-s}$.

El diagrama (6) conmuta por definición de Δ. Veamos que el diagrama (7) conmuta:

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[rrr, "\lambda^{-1}"] \arrow[d, "m^*"'] & & & \lambda_i^{-1}(f) \arrow[d, "\overline{m}"] \\
\sum_j f_{i+j} \otimes f_{-j} \arrow[r, "\lambda^{-1}\otimes 1^*"'] & \sum_j \lambda^{-1}_{i+j}(f_{i+j}) \otimes f_{-j} \arrow[r, "\simeq"'] & \sum_j f_{-j}(-)\lambda^{-1}_{i+j}(f_{i+j}) \overset{?}{=} & \bigoplus_j \lambda_i^{-1}(f).^j
\end{tikzcd}$$

donde para cada $s \in \mathbb{Z}$, $f_s \in \operatorname{Hom}(A, \mathbb{K})_s$.

Para ver que efectivamente $\sum_j f_{-j}(-)\lambda^{-1}_{i+j}(f_{i+j}) = \bigoplus_j \lambda_i^{-1}(f).^j$ evaluamos para cada $j \in \mathbb{Z}$ (fijo) las funciones en un elemento genérico $a_j \in A_j$ y componemos de ambos lados con el isomorfismo λ_{i+j}. Entonces, por un lado tenemos que:

$$\lambda_{i+j}(f_{-j}(a_j)\lambda^{-1}_{i+j}(f_{i+j})) = f_{-j}(a_j)f_{i+j}$$

y por otro lado:

$$\lambda_{i+j}(\lambda_i^{-1}(f).^j(a_j)) = \lambda_{i+j}(\lambda_i^{-1}(f)a_j) = \lambda_{i+j}(\lambda^{-1}_{i+j}(f.a_j)) = f.a_j,$$

donde usamos que λ es morfismo de A-módulo a derecha (y por lo tanto λ^{-1} también lo es).
Luego, dado $a_{-(i+j)} \in A_{-(i+j)}$ arbitrario resulta que:

$$\begin{aligned}
f_{-j}(a_j)f_{i+j}(a_{-(i+j)}) &= (\sum_k f_{i+k} \otimes f_k)(a_j \otimes a_{-(i+j)}) = m^*(f)(a_j \otimes a_{-(i+j)}) = f(a_j a_{-(i+j)}) \\
&= (f.a_j)(a_{-(i+j)})
\end{aligned}$$

lo que prueba la igualdad buscada.

En particular, la conmutatividad de los diagramas (6) y (7) nos dice que $\overline{m} = (1 \otimes \lambda) \circ \Delta$ o equivalentemente que $(1 \otimes \lambda^{-1}) \circ \overline{m} = \Delta$ y por lo tanto es directo que el diagrama (8) conmuta.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dl, "1\otimes\overline{m}"'] \arrow[d, "1\otimes\Delta"] \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, phantom, "9"] \arrow[d, phantom, "13"', shift right=20] & & A \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "\overline{m}"] \arrow[dr, phantom, "10"'] & \\
A \otimes A \otimes A^* \arrow[r, "1\otimes 1\otimes\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "m\otimes 1^*"'] & A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "m\otimes 1"'] \arrow[drr, phantom, "12"] & & A \otimes A \arrow[r, "1\otimes\lambda"] \arrow[d, "1\otimes\lambda"] \arrow[r, phantom, "11"', shift right=10] & A \otimes A^* \arrow[dl, "1\otimes 1^*"] \\
 & A \otimes A^* \arrow[rr, "1\otimes 1^*"'] & & A \otimes A^* &
\end{tikzcd}$$

Notemos que los diagramas (13) y (10) conmutan gracias a la conmutatividad de los diagramas (6), (7) y (8). Los diagramas (11) y (12) claramente conmutan y la conmutatividad del diagrama externo se prueba fácilmente, con las mismas herramientas que probamos la conmutividad del diagrama (7). Por lo tanto el diagrama (9) conmuta, y Δ es morfismo de A-módulos a izquierda. Análogamente se prueba que Δ es morfismo de A-módulos a derecha, por lo que resulta ser morfismo de A-bimódulos como queríamos.

Recíprocamente, veamos que si (A, Δ, ε) es una coálgebra graduada, podemos definir una forma bilineal no degenerada $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$, que le dará a A estructura de álgebra de Frobenius.
Definimos $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ como $\beta = \varepsilon \circ m$. Es claro que β es una forma bilineal asociativa, ya que ε y m son lineales y m es asociativo. Además β es morfismo de complejos por ser composición de morfismos de complejos. Nos queda probar que β es no degenerada. Alcanza con probar que β es no degenerada a izquierda, puesto que estamos en dimensión finita. Para ésto usaremos que, para cada $k \in \mathbb{Z}$ (fijo) el siguiente diagrama conmuta, puesto que Δ es morfismo de A-módulos a derecha:

$$\begin{tikzcd}
 & & (\bigoplus_i A_i \otimes A_{-i}) \otimes A_k \arrow[dr, "1\otimes m"] & & \\
\mathbb{K} \otimes A_k \arrow[r, "u\otimes 1"] & A_0 \otimes A_k \arrow[ur, "\Delta\otimes 1"] \arrow[dr, "m"'] & & \bigoplus_i A_i \otimes A_{k-i} \arrow[r, "1\otimes\varepsilon"] & \bigoplus_i A_i \otimes \mathbb{K} \\
 & & A_k \arrow[ur, "\Delta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Entonces sea $x \in A_k$ arbitrario y para cada $i \in \mathbb{Z}$, sea $\{e_1^{-i}, \cdots, e_{n_i}^{-i}\}$ una base de A_{-i}, siendo $n_i = \dim A_i = \dim A_{-i}$. Si $\Delta(1_A) = \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} u_j^i \otimes e_j^{-i} \in \bigoplus_i A_i \otimes A_{-i}$, aplicando las composiciones de la parte superior del diagrama obtenemos:

$$1_{\mathbb{K}} \otimes x \to 1_A \otimes x \to \left(\sum_i \sum_{j=1}^{n_i} u_j^i \otimes e_j^{-i} \right) \otimes x \to \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} u_j^i \otimes e_j^{-i} x \to \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} u_j^i \otimes \varepsilon(e_j^{-i} x)$$

y como $\varepsilon(e_j^{-i} x) = 0 \ \forall i \neq k$, resulta:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} u_j^i \otimes \varepsilon(e_j^{-i} x) = \sum_{j=1}^{n_k} u_j^k \otimes \varepsilon_0(e_j^{-k} x) = \sum_{j=1}^{n_k} u_j^k \otimes (\varepsilon_0 \circ m)(e_j^{-k} \otimes x) = \sum_{j=1}^{n_k} u_j^k \otimes \beta_0(e_j^{-k} \otimes x) \\ = \sum_{j=1}^{n_k} \beta_0(e_j^{-k} \otimes x) u_j^k \otimes 1_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Ahora, aplicando las composiciones de la parte inferior del diagrama obtenemos:

$$1_{\mathbb{K}} \otimes x \to 1_A \otimes x \to x \to \Delta(x) \to (1 \otimes \varepsilon)(\Delta(x)) = x \otimes 1_{\mathbb{K}}.$$

Entonces $x = \sum_{j=1}^{n_k} \beta_0(e_j^{-k} \otimes x) u_j^k$, y por lo tanto $\{u_1^k, \cdots, u_{n_k}^k\}$ es una base de A_k. En particular, si tomamos $x = u_l^k$ con $l \in \{1, \cdots, n_k\}$ resulta que $\beta_0(e_j^{-k} \otimes u_l^k) = \delta_{jl}$.
Finalmente, para probar que β es no degenerada a izquierda, sea $y = \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j e_j^{-k} \in A_{-k}$ arbitrario, $\alpha_j \in \mathbb{K} \ \forall j \in \mathbb{Z}$. Veamos que si $\langle y, x \rangle_k = 0 \ \forall x \in A_k$, entonces $y = 0$:

$$0 = \langle y, x \rangle_k = \langle \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j e_j^{-k}, x \rangle_k = \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j \langle e_j^{-k}, x \rangle_k = \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j \beta_0(e_j^{-k} \otimes x)$$

Si $x = u_l^k$, tenemos que $0 = \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j \beta_0(e_j^{-k} \otimes u_l^k) = \alpha_l$, por lo que haciendo variar el $l \in \{1, \cdots, n_k\}$, obtenemos que $\alpha_l = 0 \ \forall l$, y por lo tanto $y = 0$.

2. (Lauda) Probaremos que esta condición es equivalente a la condición de Abrams.
Dado el coproducto Δ definimos $\theta : \mathbb{K} \to A \otimes A$ por $\theta = \Delta \circ u$. Más explicitamente $\theta(1_k) = \Delta(1_A)$. Luego es claro que θ es morfismo de complejos, por ser composición de morfismos de complejos y que los diagramas para θ conmutan por ser Δ morfismo de A-bimódulos.
Recíprocamente, dado θ, definimos $\Delta : A \to A \otimes A$ por:

$$\Delta = (1 \otimes m) \circ (\theta \otimes 1) = (m \otimes 1) \circ (1 \otimes \theta)$$

y los diagramas de conmutatividad de θ implican que Δ es morfismo de A-bimódulos.

$\square$

Observación 2.11. **Sobre la unicidad de ε y Δ cuando A es un adg**.
Si A es un adg, los resultados vistos en 1.36 y 1.42 se aplican de forma análoga haciendo los cambios pertinentes, los cuales detallamos a continuación.
Para la unicidad del ε, tendremos que toda otra forma de Frobenius está dada por precomponer ε con la multiplicación por un elemento invertible u de A de **grado cero**. Como la forma de Frobenius ε está concentrada en grado cero (pues $\varepsilon_i = 0$ para todo $i \neq 0$) la demostración de 1.36 se mantiene inalterada si cambiamos A por A_0, ε por ε_0.
Para la unicidad de Δ la demostración de 1.42 se aplica sin más al caso de álgebras diferenciales graduadas.

2.2.1 Automorfismos de Nakayama para un adg. Existencia de Δ para el caso no simétrico.

En esta subsección probaremos en primer lugar que si A es un adg de Frobenius, podemos definir, analogamente a lo hecho en 1.44, una familia de automorfismos $\nu = \{\nu_i\} \in \{\mathrm{Aut}(A_i)\}$ que llamaremos automorfismos de Nakayama asociados a A. La demostración de la existencia de estos automorfismos es escencialmente la misma que para el caso clásico en que A es una $\mathbb{K}$-álgebra de Frobenius. Igualmente procederemos a ver los detalles para familiarizarnos aún más con el contexto graduado.
En segundo lugar, veremos que **el Teorema 2.10 vale también para el caso en que A es un adg no simétrica**. A tales efectos detallaremos las modificaciones que hay que hacer en la demostración del Teorema 2.10 para que valga el mismo esquema deductivo.

Proposición 2.12. *Sea $A = \{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ un adg de Frobenius y $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ la forma bilineal no degenerada asociada. Luego, existe una familia $\{\nu_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tales que para cada i, j se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\nu_i \in \mathrm{Aut}(A_i)$,
2. $\nu_{i+j}(ab) = \nu_i(a)\nu_j(b)$ *para todos* $a \in A_i$ *y* $b \in A_j$ *y* $\nu_0(1_A) = 1_A$,
3. $\langle \nu_i(a), b\rangle_i = (-1)^{|b||a|}\langle b, a\rangle_{-i}$ *para todos* $a \in A_i$ *y* $b \in A_{-i}$.

Demostración: Fijemos $i \in \mathbb{Z}$. Recordemos que $\langle\, ,\, \rangle_i : A_i \otimes A_{-i} \to \mathbb{K}$ es una forma bilineal no degenerada y que $n_i = \dim A_i = \dim A_{-i}$. Luego, sean $\{a_1, \cdots, a_{n_i}\}$ y $\{a'_1, \cdots, a'_{n_i}\}$ bases de A_i y A_{-i} respectivamente. Sea $P = (p_{ij})$ la matriz asociada a la forma bilineal $\langle\, ,\, \rangle_i$. Luego P es invertible (ver Observación 1.6). Dado $a = \sum_{k=1}^{n_i} \xi_k a_k \in A_i$, queremos encontrar $x = \sum_{l=1}^{n_i} x_l a_l \in A_i$ tal que $\langle x, b\rangle_i = (-1)^{|b||a|}\langle b, a\rangle_{-i}$ para todo $b \in A_{-i}$. Esta última igualdad es equivalente a que se cumpla que $\langle x, a'_j\rangle_i = (-1)^{|a'_j||a|}\langle a'_j, a\rangle_{-i}$ para todo $j \in \{1, \cdots, n_i\}$, que es a su vez equivalente a que se verifiquen las siguientes ecuaciones

$$\sum_{l=1}^{n_i} x_l p_{lj} = \sum_{k=1}^{n_i} (-1)^{|a'_j||a_k|}\xi_k \langle a'_j, a_k\rangle_{-i},$$

para todo $j \in \{1, \cdots, n_i\}$. Ya que P es invertible (y por lo tanto P^t es también invertible) se concluye por Cramer que existe una única solución al sistema de ecuaciones lineales de arriba, $x_1 = \alpha_1, \cdots, x_{n_i} = \alpha_{n_i}$. Luego definimos $\nu_i(a) = \sum_{l=1}^{n_i} \alpha_l a_l$.

Es claro que $\nu_i : A_i \to A_i$ es lineal y que es inyectivo por la no degeneración de $\langle\, ,\, \rangle_i$. Además como $\dim A_i$ es finita se deduce que $\nu_i \in \mathrm{Aut}(A_i)$.
Por contrucción de ν_i tenemos que se cumple $\langle \nu_i(a), b\rangle_i = (-1)^{|b||a|}\langle b, a\rangle_{-i}$ para todo $a \in A_i$ y $b \in A_{-i}$.
Finalmente si hacemos variar $i, j \in \mathbb{Z}$, $a \in A_i$, $b \in A_j$ y $c \in A_{-(i+j)}$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\langle \nu_{i+j}(ab), c\rangle_{i+j} &= (-1)^{|c||ab|}\langle c, ab\rangle_{-(i+j)} = (-1)^{|c||ab|}\langle ca, b\rangle_{-j} = (-1)^{|c||ab|+|b||ca|}\langle \nu_j(b), ca\rangle_j \\ &= (-1)^{|c||ab|+|b||ca|}\langle \nu_j(b)c, a\rangle_{-i} = (-1)^{|c||ab|+|b||ca|+|bc||a|}\langle \nu_i(a), \nu_j(b)c\rangle_i \\ &= \langle \nu_i(a)\nu_j(b), c\rangle_{i+j}\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $(-1)^{|c||ab|+|b||ca|+|bc||a|} = (-1)^{2|c||a|+2|c||b|+2|b||a|} = 0$. Luego como $\langle\, ,\, \rangle_{i+j}$ es no degenerada, se deduce que $\nu_{i+j}(ab) = \nu_i(a)\nu_j(b)$. En particular, si $a = \nu_0^{-1}(1_A)$ y $b = 1_A$ obtenemos que

$$\nu_0(1_A) = \nu_0(a)\nu_0(1_A) = \nu_0(a1_A) = \nu_0(a) = 1_A.$$

□

Notación 2.13. De ahora en más nos referiremos a ν como el automorfismo de Nakayama asociado a A para hablar de un elemento cualquiera de la familia $\{\nu_i\}$ sin hacer uso del subíndice que quedará sobreentendido dependiendo el contexto.

Lema 2.14. *Sean A un adg de Frobenius, $\lambda : A \to A^*$ el isomorfismo de A-módulos a izquierda asociado a A y ν el automorfismo de Nakayama asociado a A. Consideremos el siguiente mapa lineal*

$$\begin{array}{rccc} * : & A^* \otimes A & \to & A^* \\ & \varphi \otimes a & \to & \varphi * a \end{array} \tag{2.5}$$

donde $\varphi * a = \varphi.\nu(a)$ (donde esta última es la acción a derecha de A en A^* vista en 1.28). Entonces vale que

1. *$*$ es una acción a derecha de A en A^**

2. *Si en A^* ponemos la acción $*$ resulta que λ es un isomorfismo de A-bimódulos.*

Demostración:

1. Que $*$ es una acción a derecha es claro, ya que $.$ es una acción a derecha y ν preserva el producto es decir $\nu(ab) = \nu(a)\nu(b)$ para todos $a, b \in A$.

2. Dado que ya sabemos que λ es un morfismo de A-módulos a izquierda, sólo resta probar que es morfismo de A-módulos a derecha, es decir que se cumple $\lambda(ac) = \lambda(a) * c$ para todos $a, c \in A$.
   Por un lado tenemos que

   $$\lambda(ac)(b) = (-1)^{|ac||b|}\varepsilon(bac) = (-1)^{|ac||b|}\langle ba, c\rangle = (-1)^{|ac||b|+|c||ba|}\langle \nu(c), ba\rangle.$$

   Por otro lado

   $$(\lambda(a)*c)(b) = (\lambda(a).\nu(c))(b) = \lambda(a)(\nu(c)b) = (-1)^{|a|(|c|+|b|)}\varepsilon(\nu(c)ba) = (-1)^{|a|(|c|+|b|)}\langle \nu(c), ba\rangle.$$

   Como

   $$(-1)^{|ac||b|+|c||ba|} = (-1)^{(|a|+|c|)|b|+|c|(|b|+|a|)} = (-1)^{|a||b|+|a||c|+2|b||c|} = (-1)^{|a|(|c|+|b|)}$$

   se tiene la igualdad deseada $\lambda(ac)(b) = (\lambda(a) * c)(b)$ para todo $b \in A$.

□

Existencia de Δ para el caso no simétrico.

A continuación veremos qué o cuáles modificaciones debemos hacer en la demostración del Teorema 2.10 para que éste siga valiendo para el caso en que A es un adg de Frobenius no simétrica.

Consideremos $\lambda : A \to A^*$ el morfismo de A-módulos a izquierda asociado a A y dotemos a A^* de estructura de A-módulo a derecha con la acción $*$ dada en el lema anterior. Luego λ es isomorfismo de A-bimódulos como ya vimos. Definimos $\Delta : A \to A \otimes A$ de igual forma que como lo hicimos para el caso en que A es simétrica, es decir

$$\Delta = (\lambda^{-1} \otimes \lambda^{-1}) \circ m^* \circ \lambda.$$

Luego, si el isomorfismo definido en la ecuación 2.4 lo cambiamos por el siguiente isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} A_{i+j} \otimes A_j^* & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A_j, A_{i+j}) \\ b \otimes f & \longrightarrow & f \circ \nu(-)b \end{array} \tag{2.6}$$

donde $[f \circ \nu(-)b](b_j) = f(\nu(b_j))b \ \forall b_j \in A_j$ y ν es el automorfismo de Nakayama asociado a A, resulta que la demostración de 2.10 es válida para el caso no simétrico, sin más cambios que los ya mencionados (salvo los cambios subyacentes que éstos conllevan). La clave está en que para probar que Δ es morfismo de A-módulos a izquierda se usan fuertemente dos resultados: que λ es isomorfismo de A-módulo a derecha (que lo tenemos si cambiamos en A^* la acción . por la acción $*$) y que se tiene el isomorfismo entre $A_{i+j} \otimes A_j^*$ y $\mathrm{Hom}(A_j, A_{i+j})$.

Capítulo 3

Álgebras de Frobenius y nearly Frobenius en la categoría adg para el caso n-gradudado.

Como hemos visto a lo largo del desarrollo de este trabajo, los mapas relacionados a la estructura de Frobenius, $\varepsilon, \beta, \lambda, \Delta$ son mapas lineales de grado cero. El hecho de que sean de grado cero y que estemos indexando sobre $\mathbb{Z}$ fuerzan a que se tenga una simetría en lo que refiere a la dimensión de los espacios vectoriales A_i y A_{-i} para cada $i \in \mathbb{Z}$.
El objetivo en esta sección es redefinir los conceptos dados hasta ahora cambiando el conjunto sobre el cual graduamos un complejo (A, d) por $\mathbb{N}$ y permitiendo que los mapas lineales $\varepsilon, \beta, \lambda, \Delta$ sean de grado n, pero dejando intacta la estructura de álgebra diferencial del complejo (A, d). Con esto último nos referimos a que el producto del álgebra $m : A \otimes A \to A$ continuará siendo un mapa lineal de grado cero. El motivo de porqué cambiar el conjunto sobre el cual indexamos y permitir tener mapas n-graduados radica en el hecho de que en ese contexto es más natural encontrar ejemplos de álgebras diferenciales graduadas de Frobenius no triviales. La simetría de la que hablabamos más arriba ahora estará dada en términos de la dimensión de los espacios vectoriales A_i y A_{-i-n}. También veremos en este nuevo contexto que para la forma de Frobenius ε perderemos la condición de que $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ no contenga ideales a izquierda no triviales pues dado que, al permitir que ε sea n-graduado, el único mapa no nulo será $\varepsilon_{-n} : A_{-n} \to \mathbb{K}$ y como A_{-n} no es una subálgebra de A (a diferencia de A_0 que si lo es) no tendrá sentido hablar de ideales de A_{-n}. Sin embargo, podremos definir la forma de Frobenius en términos de los mapas β o λ de igual forma que en el caso cero graduado, por lo que ε resultará ser un mapa lineal n-graduado y continuará jugando el papel de counidad para la estructura de coálgebra graduada junto al mapa Δ.
Al final de este capítulo introduciremos la definición de Álgebra nearly Frobenius en el contexto n-graduado. Esta será una generalización de las Álgebras de Frobenius.

Observaciones 3.1.

1. De ahora en más cuando hablemos de morfismo de complejos de grado n nos referiremos a un mapa lineal de grado n con $n \in \mathbb{Z}$ que conmuta con el diferencial. Vale la pena aclarar que, como estamos graduando sobre $\mathbb{N}$, si $A = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $B = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ son dos complejos, para que tenga sentido hablar de un morfismo de complejos $f : (A, d) \to (B, d)$ de grado n con $n < 0$, hay que extender la graduación al conjunto $\mathbb{Z}$, y definir $A_i = B_i = 0$ para todo $i < 0$.

2. Si $f : A \to C$ y $g : B \to D$ son mapas lineales de grado n y m respectivamente, el mapa

$f \otimes g : A \otimes B \to C \otimes D$ es el mapa lineal de grado $n+m$ definido por $(f \otimes g)(a \otimes b) = (-1)^{|a||g|} f(a) \otimes g(b)$.

3. Como mencionamos en la introducción de este capítulo, la estructura algebraica se preserva intacta, por lo que (A, d) simbolizará un álgebra diferencial graduada en los términos dados en la definición 1.15. Por lo tanto el producto $m : A \otimes A \to A$ continuará siendo un morfismo de complejos de grado cero.

3.1 La función shift

De ahora en más $A = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ será un adg.
A continuación definiremos una función a la que llamaremos shift ([4]) a partir de la cual será más fácil deducir cómo redefinir los conceptos dados para el caso cero graduado ahora para el caso n graduado. También daremos una lista de propiedades que cumple esta función y que serán de suma utilidad de aquí en adelante.

Definición 3.2. Sea (A, d) un adg y $n \in \mathbb{Z}$. Consideremos el álgebra diferencial graduada $(A[n], D)$ definida por $A[n]_k = A_{k-n}$ para todo $k \geq n$, $A[n]_k = 0$ para todo $0 \leq k < n$, $D_k = d_{k-n}$ para todo $k \geq n$ y $D_k = 0$ para todo $0 \leq k < n$. Llamaremos el **shift de grado** n a la función $s_n : A \to A[n]$ definida por $s_n(a) = a$ para todo $a \in A$ de forma tal que se verifica que $|s_n(a)| = |a| + n$.

Observaciones 3.3. 1. De la definición de arriba se deduce que el siguiente digrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s_n"'] & A \\ A[n] \arrow[r, "D"'] & A[n] \arrow[u, "s_n^{-1}=s_{-n}"'] \end{tikzcd}$$

y por lo tanto s_n es un morfismo de complejos de grado n.

2. El complejo $(A[n], D)$ tiene estructura de álgebra graduada ya que hereda el producto de A. Vale la pena destacar que, si bien el producto de A es un mapa lineal de grado cero este producto "visto" en $A[n]$ es un mapa lineal de grado $-n$. Más explicitamente, si $m : A \otimes A \to A$ es el producto en A y $s_n : A \to A[n]$ es el shift de A de grado n, podemos definir un producto m_n en $A[n]$ de forma tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "s_n \otimes s_n"'] & A \arrow[d, "s_n"] \\ A[n] \otimes A[n] \arrow[r, "m_n"'] & A[n] \end{tikzcd}$$

y este producto en $A[n]$ resulta ser de grado $-n$ si m es de grado cero.

3. Es fácil verificar que $A^*[n] = (A[-n])^*$, basta observar que coinciden en cada componente homogénea de grado k con $k \geq n$:

$$A^*[n]_k = (A^*)_{k-n} \simeq (A_{-k+n})^* = (A[-n]_{-k})^* = (A[-n]^*)_k.$$

4. Si $\bullet : A \otimes A^* \to A^*$ es la acción a izquierda vista en la Proposición 1.28 y $s_n : A \to A[n]$ es el shift de A de grado n, podemos definir una acción a izquierda (en el sentido graduado) $\bullet_n : A[n] \otimes A[n]^* \to A[n]^*$ de forma tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A^* \arrow[r, "\bullet"] \arrow[d, "s_n \otimes s^*_{-n}"'] & A^* \arrow[d, "s^*_{-n}"] \\ A[n] \otimes A[n]^* \arrow[r, "\bullet_n"'] & A[n]^* \end{tikzcd}$$

Explícitamente $\widehat{a} \bullet_n \varphi = (-1)^{|\widehat{a}|n+n} s^*_{-n}(s_{-n}(\widehat{a}) \bullet s^*_n(\varphi))$ para todos $\widehat{a} \in A[n]$ y $\varphi \in A[n]^*$. Al decir que $\bullet_n$ es una acción a izquierda en el sentido graduado, nos referimos a que se verifica que $\widehat{a} \bullet_n (\widehat{b} \bullet_n \varphi) = (-1)^{|\widehat{a}|n} (\widehat{a}\widehat{b}) \bullet_n \varphi$ para todos $\widehat{a}, \widehat{b} \in A[n]$ y $\varphi \in A[n]^*$.

Proposición 3.4. *Si A es un adg y $n \in \mathbb{Z}$ valen las siguientes propiedades:*

1. *El inverso del mapa lineal $s_n \otimes s_n$ es $(-1)^n s_n^{-1} \otimes s_n^{-1}$.*

2. *$s_n(ab) = (-1)^{|a|n} s_n(a) s_n(b)$ para todos $a, b \in A$.*

3. *Sean $s_n : A \to A[n]$ el shift de A de grado n, $s_n^* : A[n]^* \to A^*$ el mapa dual de s_n y $s_n^{A[n]^*} : A[n]^* \to (A[n])^*[n]$ el shift de $A[n]^*$ de grado n. Luego $s_n^* = s_n^{A[n]^*}$ y por lo tanto $s_n^{A[n]^*}(\alpha) = (-1)^{|\alpha|n} \alpha \circ s_n$ para todo $\alpha \in A[n]^*$.*

Demostración:

1. Sean $a, b \in A$, luego:

$$\begin{aligned} (-1)^n (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(s_n \otimes s_n)(a \otimes b) &= (-1)^n (-1)^{|a|n} (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(s_n(a) \otimes s_n(b)) \\ &= (-1)^{|a|n+n} (-1)^{|s_n^{-1}||s_n(a)|} s_n^{-1} s_n(a) \otimes s_n^{-1} s_n(b) \\ &= (-1)^{|a|n+n+n(|a|+n)} a \otimes b = a \otimes b. \end{aligned}$$

donde la convención para los signos que aparecen en las igualdades de arriba son consecuencia del ítem 2 de la Observación 3.1. Esto prueba que $(-1)^n (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})$ es inverso a izquierda de $s_n \otimes s_n$ y análogamente se prueba que es inverso por la derecha.

2. Como vimos en la Observación 3.3 en el ítem 2, podemos definir un producto m_n en $A[n]$ de forma tal que $s_n \circ m = m_n \circ (s_n \otimes s_n)$, entonces si $a, b \in A$ resulta que:

$$s_n \circ m(a \otimes b) = m_n \circ (s_n \otimes s_n)(a \otimes b) = (-1)^{|a|n} m_n(s_n(a) \otimes s_n(b))$$

y por lo tanto $s_n(ab) = (-1)^{|a|n} s_n(a) s_n(b)$.

3. Alcanza con probar que $(A[n])^*[n] = A$. Por el ítem 3 de la Observación 3.3 vale que:

$$(A[n])^*[n] = (A[n][-n])^* = A^*.$$

$\square$

3.2 Las funciones λ, β y Δ como pullbacks de mapas lineales de grado 0.

La idea que nos permitió definir un producto m_n en $A[n]$ de grado $-n$ a partir de m (de grado cero) a través del shift de A de grado n (m_n no es otra cosa que el pullback de m por s_n) nos da una herramienta que nos permite obtener, vía el pullback por s_n las propiedades que deben de cumplir los mapas n-graduados si se conocen estas propiedades para los mapas 0-graduados. Así, la idea es tomar las definiciones de Frobenius dadas para el caso 0-graduado y vía el pullback por s_n obtener que condiciones debemos pedirles a los mapas n-graduados λ, β, Δ si queremos seguir teniendo una estructura de Frobenius en A.

Condiciones para λ

Supongamos que tenemos dada (A, d) un adg y $\lambda : A \to A^*$ un isomorfismo de grado n. Sea $\lambda_n : A[n] \to A[n]^*$ el isomorfismo de grado 0 de forma tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "s_n"'] & A^* \arrow[d, "s^*_{-n}"] \\ A[n] \arrow[r, "\lambda_n"'] & A[n]^* = A^*[-n] \end{tikzcd}$$

y para el cual se sabe que verifica:

1. $\lambda_n(s_n(a)s_n(b)) = (-1)^{|a|n} s_n(a) \bullet_n \lambda_n(s_n(b))$ para todos $a, b \in A$ (λ_n es un morfismo de $A[n]$-módulos a izquierda)
2. $\lambda_n \circ D = D \circ \lambda_n$ donde D es el diferencial en $A[n]$.

Entonces para λ se verificarán las siguientes condiciones:

1. $\lambda(ab) = (-1)^{|a|n} a \bullet \lambda(b)$ (λ es un morfismo de A-módulos graduados a izquierda)
2. $\lambda \circ d = d \circ \lambda$.

Veamos en primer lugar que λ es un morfismo de A-módulos graduados a izquierda. Por un lado tenemos lo siguiente:

$$\lambda_n(s_n(a)s_n(b)) = \lambda_n((-1)^{|a|n} s_n(ab)) = (-1)^{|a|n} s^*_{-n}\lambda(ab).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \lambda_n(s_n(a)s_n(b)) &= (-1)^{|a|n} s_n(a) \bullet_n \lambda_n(s_n(b)) = (-1)^{|a|n}(-1)^{|sn(a)|n+n} s^*_{-n}(s_{-n}(s_n(a)) \bullet s^*_n(\lambda_n(s_n(b)))) \\ &= (-1)^{|a|n}(-1)^{|a|n} s^*_{-n}(a \bullet s^*_n(s^*_{-n}\lambda(b))) = s^*_{-n}(a \bullet \lambda(b)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(-1)^{|a|n} s^*_{-n}\lambda(ab) = s^*_{-n}(a \bullet \lambda(b))$ y dado que s^*_{-n} es un isomorfismo, componiendo con su inverso s^*_n obtenemos que $(-1)^{|a|n}\lambda(ab) = a \bullet \lambda(b)$ como queremos.

Ahora, veamos que λ conmuta con el diferencial. Para esto, consideremos los diagramas siguientes:

$$\begin{tikzcd}
A[n] \arrow[rrr, "D"] \arrow[ddd, "\lambda_n"'] & & & A[n] \arrow[ddd, "\lambda_n"] \\
& A \arrow[ul, "s_n"'] \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\lambda"'] & A \arrow[ur, "s_n"] \arrow[d, "\lambda"] & \\
& A^* \arrow[r, "d"'] \arrow[dl, "s^*_{-n}"'] & A^* \arrow[dr, "s^*_{-n}"] & \\
A[n]^* \arrow[rrr, "D"'] & & & A[n]^*
\end{tikzcd}$$

donde los diagramas de la izquierda y la derecha conmutan por definición de λ_n, los diagramas de arriba y abajo conmutan por el item 1 de la Observación 3.3 y el diagrama externo conmuta pues es una de las condiciones que le impusimos a λ_n. Por lo tanto el diagrama interno conmuta como queremos.

Observación 3.5. Al ver a λ como el pullback de λ_n que es un mapa lineal de grado cero, ganamos en el sentido de que pasamos a trabajar con mapas cero graduados, pero perdemos desde el punto de vista de que, de tener un producto 0 graduado en A pasamos a tener un producto en $A[n]$ que nos queda graduado positiva o negativamente, así como la acción de $A[n]$ en $A[n]^*$. De todos modos lo hemos hecho así para familiarizarnos con la técnica de tomar pullbacks pues esta herramienta será de suma utilidad, por ejemplo, cuando querramos obtener las condiciones para que un cierto coproducto n graduado en A nos dé estructura de Frobenius.

Condiciones para la forma bilineal no degenerada β.
Si (A, d) es un adg y $\lambda : A \to A^*$ es un isomorfismo de grado n en las condiciones vistas arriba, podemos definir una forma bilineal asociativa no degenerada $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ de grado n de forma tal que verifique que $\lambda(a)(b) = (-1)^{|a||b|}\langle b, a\rangle$ siendo $\beta_i = 0$ para todo $i \neq -n$ y $\beta_{-n} = \bigoplus_j \langle\, ,\, \rangle_j$ donde para cada j, $\langle\, ,\, \rangle_j : A_j \otimes A_{-j-n} \to \mathbb{K}$. Vale la pena destacar que la definición de β para el caso n-graduado es exactamente la misma que la dada para el caso 0-graduado, y por lo tanto la condición de asociatividad para β no refleja, por decirlo de algún modo el hecho de que los mapas sean ahora n-graduados y no 0-graduados; es decir β será asociativo si cumple que $\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle$ para todos $a, b, c \in A$.

Condiciones para Δ

Si (A, d) es un adg y $\lambda : A \to A^*$ es el isomorfismo n-graduado que le dará estructura de Frobenius a A, podremos definir un coproducto $\Delta : A \to A \otimes A$ que resultará ser $-n$ graduado de igual forma que como lo hicimos para el caso 0-graduado, es decir $\Delta := (\lambda^{-1} \otimes \lambda^{-1}) \circ m^* \circ \lambda$. Si nos paramos en la componente homogénea de grado i del álgebra A tendremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "\Delta_i"] \arrow[d, "\lambda_i"'] & \bigoplus_{j+l=i+n} A_{j-n} \otimes A_{l-n} = \bigoplus_{k+p=i-n} A_k \otimes A_p \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K})_{i+n} \arrow[r, "m^*"'] & \bigoplus_{j+l=i+n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K})_j \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K})_l \arrow[u, "\bigoplus_{j+l=i+n} \lambda_j^{-1} \otimes \lambda_l^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Este diagrama nos deja más en claro que Δ es efectivamente un mapa lineal $-n$-graduado.

Al igual que lo hecho para λ, veamos a Δ como el pullback por s_n de un coproducto Δ_n 0-graduado en $A[n]$. Así si para Δ_n se verifica que:

1. $(\Delta_n \otimes 1)\Delta_n = (1 \otimes \Delta_n)\Delta_n$ (coasociatividad)
2. $\Delta_n \circ D = D \circ \Delta_n$

para Δ se verificará que:

1. $(\Delta \otimes 1)\Delta = (-1)^n(1 \otimes \Delta)\Delta$ (coasociatividad graduada)
2. $\Delta \circ d = (-1)^n d \circ \Delta$.

Comencemos probando que se tiene la coasociatividad graduada para Δ.
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "s_n"'] & A \otimes A \arrow[d, "s_n \otimes s_n"] \\ A[n] \arrow[r, "\Delta_n"'] & A[n] \otimes A[n] \end{tikzcd}$$

Dado que el inverso de $s_n \otimes s_n$ es $(-1)^n s_n^{-1} \otimes s_n^{-1}$ obtenemos que $\Delta = (-1)^n(s_n^{-1} \otimes s_n^{-1}) \circ \Delta_n \circ s_n$. Sea $a \in A$ y $\Delta_n(s_n(a)) = \sum sa' \otimes sa''$ (notación de Sweedler). Entonces, por un lado vale que:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes 1)\Delta(a) &= (-1)^n(\Delta \otimes 1)[(s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(\Delta_n(s_n(a)))] \\
&= (-1)^n(\Delta \otimes 1)[(s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(\sum sa' \otimes sa'')] \\
&= (-1)^n(\Delta \otimes 1)[(-1)^{|sa'|n} \sum s_n^{-1}(sa') \otimes s_n^{-1}(sa'')] \\
&= (-1)^{|sa'|n+n} \sum \Delta(s_n^{-1}(sa')) \otimes s_n^{-1}(sa'') \\
&= (-1)^{|sa'|n+n} \sum (-1)^n (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(\Delta_n(sa')) \otimes s_n^{-1}(sa'') \\
&= (-1)^{|sa'|n}(-1)^{|\Delta_n(sa')|n}(s_n^{-1} \otimes s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})[\sum \Delta_n(sa') \otimes sa''] \\
&= (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(\Delta_n \otimes 1)\Delta_n(s_n(a)) \\
&= (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(1 \otimes \Delta_n)\Delta_n(s_n(a)) \\
&= (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})[\sum sa' \otimes \Delta_n(sa'')] \\
&= (-1)^{|sa'||s_n^{-1} \otimes s_n^{-1}|} \sum s_n^{-1}(sa') \otimes (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})\Delta_n(sa'') \\
&= (-1)^{|sa'|2n} \sum s_n^{-1}(sa') \otimes (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})\Delta_n(sa'') \\
&= \sum s_n^{-1}(sa') \otimes (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})\Delta_n(sa'').
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $|s_n^{-1}| = -n$ y que $(-1)^{-n} = (-1)^n$.
Por otro lado:

$$\begin{aligned}
(1 \otimes \Delta)\Delta(a) &= (-1)^{|sa'|n+n}(1 \otimes \Delta)[\sum s_n^{-1}(sa') \otimes s_n^{-1}(sa'')] \\
&= (-1)^{|sa'|n+n}(-1)^{|s_n^{-1}(sa')||\Delta|} \sum s_n^{-1}(sa') \otimes \Delta(s_n^{-1}(sa'')) \\
&= (-1)^{|sa'|n+n}(-1)^{(|sa'|-n)n} \sum s_n^{-1}(sa') \otimes (-1)^n(s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(\Delta_n(sa'')) \\
&= (-1)^n \sum s_n^{-1}(sa') \otimes (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(\Delta_n(sa''))
\end{aligned}$$

lo que prueba la coasociatividad graduada para Δ.

Nos queda probar que Δ conmuta con el diferencial en el siguiente sentido:

$$\Delta \circ d = (-1)^n d \circ \Delta.$$

Recordemos que el shift $s_n : A \to A[n]$ conmuta con el diferencial, $D \circ s_n = s_n \circ d$ (ver Observación 3.3). De aquí se deduce que $(s_n^{-1} \otimes s_n^{-1}) \circ D = (-1)^n d \circ (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})$:

$$\begin{aligned}
&((s_n^{-1} \otimes s_n^{-1}) \circ D)(s_n(a) \otimes s_n(b)) = (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(Ds_n(a) \otimes s_n(b) + (-1)^{|s_n(a)|} s_n(a) \otimes Ds_n(b)) \\
&= (-1)^{|Ds_n(a)|n} s_n^{-1} Ds_n(a) \otimes s_n^{-1} s_n(b) + (-1)^{|s_n(a)|}(-1)^{|s_n(a)|n} s_n^{-1} s_n(a) \otimes s_n^{-1} Ds_n(b) \\
&= (-1)^{(|a|+n-1)n} d(a) \otimes b + (-1)^{(|a|+n)(n+1)} a \otimes d(b) \\
&= (-1)^{n(|a|+n+1)}(d(a) \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes d(b)) \\
&= (-1)^n (-1)^{|s_n(a)|n} d(a \otimes b) \\
&= (-1)^n d((-1)^{|s_n(a)|n} a \otimes b) \\
&= (-1)^n d((s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(s_n(a) \otimes s_n(b))) \\
&= (-1)^n (d \circ (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1}))(s_n(a) \otimes s_n(b)))
\end{aligned}$$

para todos $a, b \in A$. Luego

$$\begin{aligned}
(\Delta \circ d)(a) &= (-1)^n (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1}) \circ \Delta_n \circ s_n(d(a)) \\
&= (-1)^n (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(\Delta_n(s_n d(a))) \\
&= (-1)^n (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(\Delta_n(Ds_n(a))) \\
&= (-1)^n (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})(D\Delta_n(s_n(a))) \\
&= (-1)^n (-1)^n d((s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})\Delta_n s_n(a)) \\
&= (-1)^n d((-1)^n (s_n^{-1} \otimes s_n^{-1})\Delta_n s_n(a)) \\
&= (-1)^n d(\Delta(a)) \\
&= (-1)^n (d \circ \Delta)(a).
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ es una counidad n-graduada para el coproducto Δ. Esto significa que se deberán verificar las siguientes igualdades:

$$id_A = (1 \otimes \varepsilon)\Delta = (\varepsilon \otimes 1)\Delta.$$

Ahora como estamos en el contexto graduado, si $|\varepsilon| = n$ y $|\Delta| = -n$ estas igualdades pueden expresarse (usando la notación de Sweedler) como:

$$a = \sum (-1)^{|a'|n} a' \varepsilon(a'') = \sum \varepsilon(a') a''$$

siendo $a \in A$ (arbitrario) y $\Delta(a) = \sum a' \otimes a''$.

3.3 Definiciones de Álgebra de Frobenius para el caso n-graduado.

A continuación, haciendo uso de los resultados probados para el caso n-graduado, nos proponemos explicitar en este contexto, cuáles serían las definiciones equivalentes de álgebra de

Frobenius para un adg (A, d). También, sobre el final de este capítulo debilitaremos algunas de las hipótesis de la definición de álgebra de Frobenius para obtener así la definición de un adg *nearly-Frobenius*. En el capítulo siguiente daremos algunos ejemplos de estas últimas álgebras y veremos si alguna de ellas admite estructura de Frobenius.

Definición 3.6. Dada (A, d) un adg de dimensión finita y de tipo finito, decimos que A es un **álgebra de Frobenius de grado n**, si se verifica alguna de las siguientes definiciones equivalentes:

1. Existe un mapa lineal de grado n, $\beta : (A \otimes A, d) \to (\mathbb{K}, d)$ que es además una forma bilineal no degenerada, asociativa y que conmuta con el diferencial d.

2. Existe un isomorfismo de grado n, $\lambda : (A, d) \to (A^*, d)$ que verifica que $\lambda(ab) = (-1)^{|a|n} a.\lambda(b)$ y que conmuta con el diferencial d.

3. (**Definición de Abram**) Existen dos mapas lineales, un coproducto $\Delta : (A, d) \to (A \otimes A, d)$ de grado $-n$ y una counidad $\varepsilon : (A, d) \to \mathbb{K}$ de grado n tales que:

   (a) (A, Δ, ε) es una coálgebra n-graduada, es decir se cumple que $(\Delta \otimes 1)\Delta = (-1)^n (1 \otimes \Delta)\Delta$ y $id_A = (1 \otimes \varepsilon)\Delta = (\varepsilon \otimes 1)\Delta$.

   (b) Δ y ε conmutan con el diferencial en el siguiente sentido: $\Delta \circ d = (-1)^n d \circ \Delta$ y $\varepsilon \circ d = d \circ \varepsilon$.

   (c) Δ es un morfismo de $A-$bimódulos, más explicitamente (usando la notación de Sweedler) se cumple que:

$$\sum (xy)' \otimes (xy)'' = \sum (-1)^{|x|n} xy' \otimes y'' = \sum x' \otimes x'' y.$$

Observación 3.7. Como habíamos comentado al comienzo de este capítulo, puede no quedar del todo claro como definir $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ de forma tal que sea una counidad para el coproducto Δ en la definición de Abram. Lo cierto es que podemos definir $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ de grado n como

$$\varepsilon(a) = \langle a, 1 \rangle = \langle 1, a \rangle = \lambda(1)(a)$$

para todo $a \in A$ (de igual forma que como lo haciamos en el contexto 0-graduado).

Observación 3.8. **Con respecto a los automorfismos de Nakayama en el caso n-graduado.** Dado que la forma bilineal β y la estructura de álgebra de (A, d) están definidas de igual forma que lo hecho para el caso 0-graduado, podemos hablar en el contexto n-graduado de los automorfismos de Nakayama para A asociados a la forma bilineal β y estos preservaran todas las condiciones dadas para el caso 0-graduado.

3.4 Definición de Álgebra nearly Frobenius para el caso n-graduado

Las álgebras nearly Frobenius surgen como una generalización de las álgebras de Frobenius, frente a la imposibilidad de definir, en muchos casos, para un cierto coproducto dado sobre un álgebra A, una counidad para dicho coproducto.
Nos interesa definir lo que para nosotros será un adg (A, d) nearly Frobenius en el contexto n-graduado.

Definición 3.9. Sea (A, d) un adg. Decimos que A es un **álgebra nearly Frobenius de grado n** si viene equipada con un mapa lineal $\Delta : A \to A \otimes A$ de grado $-n$ que verifica que $(\Delta \otimes 1)\Delta = (-1)^n(1 \otimes \Delta)\Delta$, $\Delta \circ d = (-1)^n d \circ \Delta$ y es además un morfismo de $A-$bimódulos, más explicitamente (usando la notación de Sweedler) se cumple que:

$$\sum (xy)' \otimes (xy)'' = \sum (-1)^{|x|n} xy' \otimes y'' = \sum x' \otimes x'' y.$$

Por más información sobre las álgebras nearly Frobenius en el contexto clásico, consultar [1] y [3].

Observación 3.10. Si Δ es un coproducto nearly Frobenius en A de grado n, éste queda determinado por su evaluación en el $1 \in A$, pues la condición de que Δ sea morfismo de bimódulos graduados fuerza a que se tengan las siguientes igualdades:

$$\Delta(x) = (-1)^{|x|n}(x \otimes 1)\Delta(1) = \Delta(1)(1 \otimes x) \tag{3.1}$$

para todo $x \in A$.

Capítulo 4

Ejemplos de Álgebras de Frobenius y nearly Frobenius en la categoría adg.

En este capítulo daremos dos ejemplos de álgebras diferenciales graduadas nearly Frobenius. El primer ejemplo consistirá de un álgebra graduada con diferencial cero, y admitirá ciertos coproductos graduados que le darán estructura nearly Frobenius. De todas estas estructuras, una de ellas se podrá completar a una estructura de Frobenius. Una vez hecho esto, la idea es hacer uso de un algoritmo que nos permite en algún sentido levantar la estructura de adg de A a una con diferencial no trivial. Con levantar nos referimos a encontrar un adg con diferencial no trivial que denotamos $\wedge V$ y que llamaremos **modelo mínimo** de A, tal que la cohomología de $\wedge V$ es A. Una buena pregunta que podemos hacernos es si vía este algoritmo podremos también levantar alguna de las estructuras de coproducto que tenemos en A de forma tal de obtener un adg nearly Frobenius con diferencial no trivial. En este primer ejemplo probaremos que de hecho el algoritmo es meramente algebraico, pues finalmente no podremos levantar ninguno de los coproductos de A como quisieramos que sucediera. Pese a esto, no significa que no podamos encontrar ejemplos de álgebras diferenciales graduadas nearly Frobenius con diferencial no trivial, y justamente el segundo ejemplo que daremos apunta en esta dirección.

También se pueden encontrar otros ejemplos en [4].

Observación 4.1. Recordemos que a $\wedge V$ le llamabamos álgebra conmutativa libre sobre el espacio vectorial graduado V (ver 1.22).

Definición 4.2. Dado un mapa lineal $\varphi : (\wedge V, d) \to (A, d)$, decimos que φ es un **cuasi-isomorfismo** si es un morfismo de adg e induce un isomorfismo en cohomología, es decir si el mapa lineal $H(\varphi) : H^*(\wedge V) \to H^*(A)$ dado por $H(\varphi)([v]) = [\varphi(v)]$ es un isomorfismo, donde [ ] denota cada clase en cohomología.

Observación 4.3. Si (A, d) es un adg y $d = 0$ tenemos que $H^*(A) \simeq A$ y por lo tanto si $\varphi : (\wedge V, 0) \to (A, 0)$, φ es un cuasi-isomorfismo si y sólo si es un isomorfismo.

El algoritmo para obtener el modelo mínimo

Partimos con un álgebra graduada A con $d = 0$ y tal que $A_0 = \mathbb{K}$ y $A_1 = 0$. Supongamos que tenemos definida un adg (N, d) y un morfismo de álgebras diferenciales graduadas $h : (N, d) \to (A, d)$ tal que h es un cuasi-isomorfismo hasta grado n. Lo que queremos hacer es extender (N, d) a un adg (N', d) y extender h a un morfismo de álgebras diferenciales graduadas $h' : (N', d) \to (A, d)$ de forma tal que h' es un cuasi-isomorfismo hasta grado $n + 1$ y así por inducción en n obtener un cuasi-isomorfismo en todos los grados.

Explícitamente consideremos el mapa $H^{n+1}(h) : H(N)^{n+1} \to A_{n+1}$ y sean $Z = \ker H^{n+1}(h)$ y $W = \operatorname{Coker} H^{n+1}(h)$. Supongamos que $\{[z_1], \cdots, [z_r]\}$ es una base de Z ($|z_i| = n+1$ para todo i) y que $[w_1], \cdots, [w_t]$ son una base de W. Consideremos variables $x_1, \cdots, x_r$ y $y_1, \cdots, y_t$ tales que $|x_i| = n$ para todo $i = 1, \cdots, r$ y $|y_j| = n+1$ para todo $j = 1, \cdots, t$ y extendemos N a N' de forma tal que la componente homogénea de grado n de N' contiene a los elementos de grado n de N y a las variables $x_1, \cdots, x_r$, y la componente homogénea de grado $n+1$ de N' contiene a los elementos de grado $n+1$ de N y a las variables $y_1, \cdots, y_t$ y extendemos h a h' y d definiendo $h'(x_i) = 0$, $d(x_i) = z_i$ para todo i y $h'(y_j) = w_j$ y $d(y_j) = 0$ para todo j. De esta manera $H^{n+1}(h')$ resulta un isomorfismo. El proceso se itera ahora para N' y h'.

4.1 Ejemplo 1: el álgebra de polinomios truncada.

Consideremos el álgebra diferencial graduada $(A, 0) = \left(\dfrac{\mathbb{Q}[x]}{x^{n+1}}, 0\right)$ donde $|x| = 2$. Es claro que $A_0 = \mathbb{Q}$ y que $A_1 = 0$ por lo que estamos en las hipótesis del algoritmo arriba descripto. Usemos entonces el algoritmo para asociarle a A un modelo mínimo.
Consideremos $\varphi : (\wedge y, 0) \to \left(\dfrac{\mathbb{Q}[x]}{x^{n+1}}, 0\right)$, tal que $|y| = 2$ y $\varphi(y) = x$. Es claro que $H(\varphi) = \varphi$ es sobreyectivo pero no inyectivo pues $\operatorname{Ker}(\varphi) = < y^{n+1} >$. Introducimos entonces un nuevo generador z de grado $2n+1$ tal que $dz = y^{n+1}$ y extendemos φ definiendo $\varphi(z) = 0$. Luego φ es un cuasi-isomorfismo y el álgebra diferencial graduada $(\wedge(y, z), d)$, $|y| = 2$, $|z| = 2n+1$, $dy = 0$ y $dz = y^{n+1}$ es un modelo mínimo para A.

Nos proponemos ahora en primer lugar darle estructura nearly Frobenius al adg A y veremos luego que no podremos "levantarlo" vía el cuasi-isomorfismo φ a un coproducto en $(\wedge(y, z), d)$.

Por la Observación 3.10, basta con definir los coproductos graduados en el $1 \in A$.
Para cada $k = 0, \cdots, n$ definimos $\Delta_k(1) = \sum_{i+j=n+k} x^i \otimes x^j$.
En [3] se prueba que estos Δ_k son coproductos nearly Frobenius en A cuando consideramos a A como $\mathbb{Q}$-álgebra y por lo tanto éstos verifican que $(\Delta_k \otimes 1)\Delta_k = (1 \otimes \Delta_k)\Delta_k$ (son coasociativos) y que $\Delta_k(x) = (x \otimes 1)\Delta_k(1) = \Delta_k(1)(1 \otimes x)$ para todo $x \in A$.

Ahora dado que nuestra álgebra A está graduada tendremos que estos Δ_k serán coproductos graduados de grado $n_k = 2n + 2k$ (pues $|x| = 2$) para cada k y por lo tanto las condiciones de ser coasociativos graduados $(\Delta_k \otimes 1)\Delta_k = (-1)^{n_k}(1 \otimes \Delta_k)\Delta_k$ y morfismos de bimódulos graduados (vista en la Observación 3.10) se verifican automáticamente porque n_k es de grado par para cada k.

También es inmediato que para estos Δ_k se cumple que $\Delta_k \circ d = (-1)^{n_k} d \circ \Delta_k$ ya que $d = 0$.

Por lo tanto, según la Definición 3.9 el adg A resulta ser un álgebra nearly Frobenius de grado n_k para cada k.

Notemos que Δ_0 admite una completación a un coproducto de Frobenius de grado $2n$ definiendo la forma de Frobenius $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ por

$$\varepsilon(x^i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq i < n \\ 1 & \text{si} \quad i = n \end{cases}$$

Veamos ahora que ninguno de los Δ_k se pueden levantar a un coproducto nearly Frobenius en el adg $\wedge(y,z)$.
Que alguno de ellos se pudiera levantar significaría poder definir $\Delta : \wedge(y,z) \to \wedge(y,z) \otimes \wedge(y,z)$ de forma tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
\wedge(y,z) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\varphi"'] & \wedge(y,z) \otimes \wedge(y,z) \arrow[d, "\varphi\otimes\varphi"] \\
A \arrow[r, "\Delta_k"'] & A \otimes A
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, como $\{y^i\}_{i=0}^{\infty} \cup \{y^i z\}_{i=0}^{\infty}$ es una base de $\wedge(y,z)$ (recordar que como $|z|$ es impar y $\wedge(y,z)$ es un álgebra conmutativa graduada se tiene que $z^2 = 0$), resulta que

$$\Delta(1) = \sum a_{ij} y^i \otimes y^j + \sum b_{ij} y^i \otimes y^j z + \sum c_{ij} y^i z \otimes y^j + \sum d_{ij} y^i z \otimes y^j z$$

donde estas sumas son sumas finitas con coeficientes en $\mathbb{Q}$.
Componiendo con $\varphi \otimes \varphi$ en ambos lados de la igualdad de arriba, y recordando que $\varphi(y) = x$, que $\varphi(z) = 0$ y que φ es morfismo de álgebras resulta que $(\varphi \otimes \varphi)\Delta(1) = \sum a_{ij} x^i \otimes x^j$ y como queremos que $(\varphi \otimes \varphi)\Delta = \Delta_k \circ \varphi$ y $\Delta_k(1) = \sum_{i+j=n} x^i \otimes x^j$ debe ser $a_{ij} = 1$ para todo i, j tal que $i + j = n$. Ahora imponiendo la condición de que Δ debe ser morfismo de bimódulos tiene que verificarse que $\Delta(z) = \sum a_{ij} y^i \otimes y^j z + c_{ij} y^i z \otimes y^j z = \sum a_{ij} y^i z \otimes y^j + \sum b_{ij} y^i z \otimes y^j z$ de lo que se deduce que $a_{ij} = 0$ para todo i, j lo que contradice el hecho de que $a_{ij} = 1$ para todo i, j tal que $i + j = n$. Esto nos permite concluir que no existe un coproducto Δ que levante a Δ_k vía φ.

Observaciones 4.4.

1. Si en el ejemplo anterior $|x| = 1$, rastreando las cuentas en [3] que permiten deducir la fórmula que define a los coproductos Δ_k para la $\mathbb{Q}-$álgebra $A = \dfrac{\mathbb{Q}[x]}{x^{n+1}}$ veremos que también en este caso (cuando x tiene grado impar) los mismos Δ_k considerados en el ejemplo anterior serán coproductos nearly Frobenius para A de grado $n+k$ para cada $k = 0, \cdots, n$.

2. Un resultado importante para las $\mathbb{K}$-álgebras nearly Frobenius es que el conjunto de los coproductos nearly Frobenius para un $\mathbb{K}-$álgebra dada A forman un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Cuando pasamos a trabajar en el contexto graduado, y permitimos que A sea un adg y los coproductos sean ahora coproductos graduados, este resultado deja de valer, pues no queda claro como asignarle un grado a una combinación lineal de coproductos graduados en distintos grados.

4.2 Ejemplo 2: un álgebra nearly Frobenius de dimensión infinita.

Consideremos el adg $(A,d) = \left(\dfrac{\mathbb{Q}[x,y,z]}{(x^2, xy, yz, z^2)}, d \right)$ donde $|x| = 2$, $|y| = 4$, $|z| = 1$, $d(x) = d(z) = 0$ y $d(y) = xz$. En primer lugar veremos que podemos definir en A tres coproductos nearly Frobenius Δ_1, Δ_2 y Δ_3 de grados $4, 5$ y 6 respectivamente. En segundo lugar, probaremos que éstos son los únicos coproductos graduados que podemos poner en A.
Consideremos $\mathcal{A} = \{1, x, z, xz\} \cup \{y^i\}_{i=1}^{+\infty}$ una base de A. Comenzaremos definiendo el coproducto de grado 5 para que se visulice mejor la dependencia del grado en la definición de coproducto graduado.

- Definimos $\Delta_2(1) = xz \otimes x - x \otimes xz$ de grado $n = 2|x| + |z| = 5$.
Veamos que Δ_2 se puede extender a A de forma de obtener un morfismo de A-bimódulos. Para esto alcanza ver que es posible extenderlo a la base $\mathcal{A}$ de A:

  - $(-1)^{|x|n}(x \otimes 1)\Delta_2(1) = x^2z \otimes x - x^2 \otimes xz = 0 = xz \otimes x^2 - x \otimes x^2z = \Delta_2(1)(1 \otimes x)$, por lo tanto podemos definir $\Delta_2(x) = 0$.
  - $(-1)^{|z|n}(z \otimes 1)\Delta_2(1) = (-1)^5(xz^2 \otimes x - xz \otimes xz) = xz \otimes xz = \Delta_2(1)(1 \otimes z)$ por lo tanto podemos definir $\Delta_2(z) = xz \otimes xz$.
  - $(-1)^{|xz|n}(xz \otimes 1)\Delta_2(1) = (-1)^{15}(x^2z^2 \otimes x - x^2z \otimes xz) = 0 = xz \otimes x^2z - x \otimes x^2z^2 = \Delta_2(1)(1 \otimes xz)$ entonces podemos definir $\Delta_2(xz) = 0$ y verifica la condición de bimódulo.
  - $(-1)^{|y^i|n}(y^i \otimes 1)\Delta_2(1) = (-1)^{20i}(xzy^i \otimes x - xy^i \otimes xz) = 0 = xz \otimes xy^i - x \otimes xzy^i = \Delta_2(1)(1 \otimes y^i)$ por lo tanto podemos definir $\Delta_2(y^i) = 0$ para todo $i = 1, \cdots, +\infty$.

  Veamos que Δ_2 así definido verifica que $(1 \otimes \Delta_2)\Delta_2 = (-1)^n(\Delta_2 \otimes 1)\Delta_2$ y que $\Delta_2 \circ d = (-1)^n d \circ \Delta_2$.

  - Por un lado tenemos que

    $$(1 \otimes \Delta_2)\Delta_2(1) = (1 \otimes \Delta_2)(xz \otimes x - x \otimes xz) = (-1)^{|xz|n} xz \otimes \Delta_2(x) - (-1)^{|x|n} x \otimes \Delta_2(xz) = 0$$

    y por otro lado

    $$(-1)^n(\Delta_2 \otimes 1)\Delta_2(1) = (-1)^5(\Delta_2 \otimes 1)(xz \otimes x - x \otimes xz) = -\Delta_2(xz) \otimes x + \Delta_2(x) \otimes xz = 0$$

    y análogamente se prueba que $(1 \otimes \Delta_2)\Delta_2(z) = (-1)^n(\Delta_2 \otimes 1)\Delta_2(z)$ y por lo tanto Δ_2 verifica la condición de coasociatividad.
  - Para probar que $\Delta_2 \circ d = (-1)^n d \circ \Delta_2$ alcanza con observar que

    $$(\Delta_2 \circ d)(y) = \Delta_2(xz) = 0 = (-1)^n(d \circ \Delta_2)(y)$$

    donde en la primera igualdad usamos que, por definición, se tiene que $d(y) = xz$.

  Por lo tanto Δ_2 es un coproducto nearly Frobenius de grado 5.

- Definimos $\Delta_1(1) = xz \otimes z + z \otimes xz$ de grado $n = 2|z| + |x| = 4$.
Análogamente a lo hecho para Δ_2 se prueba que $\Delta_1(x) = xz \otimes xz$, $\Delta_1(z) = \Delta_1(xz) = \Delta_1(y^i) = 0$ para todo i y que este es coasociativo y conmuta con el diferencial d por lo que Δ_1 es un coproducto nearly Frobenius de grado 4.

- Definimos $\Delta_3(1) = xz \otimes xz$ de grado $n = 2(|x| + |z|) = 6$.
Este Δ_3 queda bien definido y verifica la condición de ser morfismo de bimódulos si definimos $\Delta_3(a) = 0$ para todo $a \in A$, $a \neq 1$. La condición de coasociatividad y la conmutatividad con d se verifican automáticamente y Δ_3 resulta ser entonces un coproducto nearly Frobenius de grado 6.

Veamos ahora que Δ_1, Δ_2 y Δ_3 son los únicos coproductos graduados en A (a menos de un múltiplo).

- Si $\Delta : A \to A \otimes A$ es un coproducto graduado en A observemos que cuando expresamos $\Delta(1)$ como combinación lineal de la base $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ no pueden aparecer los términos que involucran a la parte "infinita" del álgebra, es decir las potencias de y^i, $i = 1, \cdots, +\infty$. Veamos esto con más detalle. Si en $\Delta(1)$ aparecen sumandos de la forma

$$N = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j\geq 1}}^{n_i,n_j} \alpha a y^i \otimes \beta b y^j \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \quad a, b \in \mathcal{A} - \{y^i\}_{i=1,\cdots,+\infty}$$

considero $m > \max\{n_i, n_j : i = 0, \cdots, +\infty, j = 0 \cdots, +\infty,\ i+j \geq 1\} > 0$. Como queremos que Δ sea morfismo de A-bimódulos, deberá cumplir que

$$(-1)^{|y^m|n}(y^m \otimes 1)\Delta(1) = \Delta(1)(1 \otimes y^m)$$

y por lo tanto

$$(-1)^{m|y|n} \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j\geq 1}}^{n_i,n_j} \alpha a y^{i+m} \otimes \beta b y^j = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j\geq 1}}^{n_i,n_j} \alpha a y^i \otimes \beta b y^{j+m} \tag{4.1}$$

Como $i + m > i$ y $j + m > j$ la igualdad de arriba será posible solo si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$ y en tal caso $N = 0$ por lo que este tipo de sumandos no aparecen en la expresión de $\Delta(1)$ en términos de la base.

- Veamos ahora cuales son los generadores de cada componente homógenea en $(A \otimes A)$.

  · $(A \otimes A)_0 =< 1 \otimes 1 >$
  · $(A \otimes A)_1 =< 1 \otimes z, z \otimes 1 >$
  · $(A \otimes A)_2 =< 1 \otimes x, x \otimes 1, z \otimes z >$
  · $(A \otimes A_3 =< 1 \otimes xz, xz \otimes 1, x \otimes z, z \otimes x >$
  · $(A \otimes A)_4 =< 1 \otimes y, y \otimes 1, x \otimes x, xz \otimes z, z \otimes xz >$
  · $(A \otimes A)_5 =< x \otimes xz, xz \otimes x, z \otimes y, y \otimes z >$
  · $(A \otimes A)_6 =< x \otimes y, y \otimes x, xz \otimes xz >$
  · $(A \otimes A)_j = 0$ para todo $j \geq 7$, $j \neq 4k$ con $k = 2, \cdots, +\infty$
  · $(A \otimes A)_{4k} =< 1 \otimes y^k, y^k \otimes 1 >$ para todo $k = 2, \cdots, +\infty$.

Entonces, probaremos que no existen coproductos en grado $0, 1, 2, 3$ a menos de los triviales. Si $\Delta : A \to A \otimes A$ es un coproducto de grado cero, entonces $\Delta(1) = \alpha 1 \otimes 1$ para algún $\alpha \in \mathbb{Q}$. Es claro que este Δ no verifica la condición de bimódulo para x a menos que α sea nulo, pues

$$(-1)^{|x|.0}(x \otimes 1)\Delta(1) = \alpha x \otimes 1 \neq \alpha 1 \otimes x = \Delta(1)(1 \otimes x)$$

Razonando análogamente, si $\Delta : A \to A \otimes A$ es un coproducto de grado 1, entonces $\Delta(1) = \alpha_1 1 \otimes z + \alpha_2 z \otimes 1$. Por lo tanto, si $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$

$$(-1)^{|x|.1}(x \otimes 1)\Delta(1) = \alpha_1 x \otimes z + \alpha_2 xz \otimes 1 \neq \alpha_1 1 \otimes xz + \alpha_2 z \otimes x = \Delta(1)(1 \otimes x)$$

Entonces no existen coproductos de grado 1.

Este procedimiento permite probar que tampoco pueden haber coproductos en grado 2 y 3.

Para grado 4 aparecen coproductos no triviales:

$$\Delta(1) = \alpha_1 x \otimes x + \alpha_2 xz \otimes z + \alpha_3 z \otimes xz$$

Observar que en la expresión de $\Delta(1)$ en términos de la base no aparecen involucrados sumandos del tipo $1 \otimes y$, $y \otimes 1$ como ya hemos observado en el punto anterior.
Aplicando la condición de bimódulo para x obtenemos que

$$(-1)^{|x|.4}(x \otimes 1)\Delta(1) = \alpha_3 xz \otimes xz = \alpha_2 xz \otimes xz = \Delta(1)(1 \otimes x) \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_3$$

Luego $\Delta(1) = \alpha_1 x \otimes x + \alpha_2(xz \otimes z + z \otimes xz)$. Aplicando ahora la condición de bimódulo para z resulta que

$$(-1)^{|z|.4}(z \otimes 1)\Delta(1) = \alpha_1 xz \otimes x = \alpha_1 x \otimes xz = \Delta(1)(1 \otimes z) \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$$

obteniendose así que

$$\Delta(1) = \alpha_2(xz \otimes z + z \otimes xz)$$

o sea que a menos de un múltiplo $\Delta = \Delta_1$.

Análogamente se prueba que si Δ es un copoducto de grado 5 entonces $\Delta = \Delta_2$ y si es de grado 6 resulta $\Delta = \Delta_3$ (a menos de múltiplos).

Es claro también que no existirán coproductos no triviales de grado mayor o igual a 7, pues los generadores de estas componentes homogéneas en $A \otimes A$ solo involucran términos del tipo $1 \otimes y^k$, $y^k \otimes 1$.

Observación final El ejemplo anterior nos permite visualizar el siguiente resultado que vale la pena destacar: **Si A es un álgebra diferencial graduada de dimensión infinita y existen coproductos no triviales en A, éstos solo involucran a la "parte finita" del álgebra**; es decir si en la base de A aparecen potencias infinita de algún elemento de A, entonces estos términos no aparecen involucrados en la expresión de $\Delta(1)$ en términos de la base. Esto hace que construir coproductos en un álgebra de dimensión infinita sea más o menos manejable desde el punto de vista de que sólo jugaremos con la parte finita del álgebra a la hora de hallar la expresión de $\Delta(1)$ en términos de alguna base de A.

Posibles futuras líneas de trabajo.

1. En la introducción del capítulo 4 se menciona un algoritmo que permite construir un adg (con diferencial no nulo) cuasi-isomorfa a un álgebra A (que puede tener diferencial nulo). En el ejemplo presentado, justamente se comienza con un adg con diferencial nulo que admite estructura de álgebra nearly Frobenius y se contruye su levantado con diferencial no nulo. La pregunta natural que uno se puede hacer es que si se puede levantar alguna de las estructuras nearly que admite el álgebra original. Lamentablemente en el ejemplo la respuesta es no. Podemos, en consecuencia, hacernos la siguiente pregunta, hay alguna condición sobre el álgebra y el morfismo que nos permita asegurar la existencia de una estructura no trivial sobre el modelo levantado? Si esta pregunta tiene una respuesta afirmativa tendríamos una herramienta para construir nuevos ejemplos de álgebras nearly Frobenius en la categoría de adg.

2. En el trabajo de Abbaspour, *On the Hochschild Homology of Open Frobenius Algebras*, se construye una estructura de álgebra nearly Frobenius sobre la homología de Hochschild de un álgebra de Frobenius simétrica. En esta dirección lo primero que uno puede tratar de hacer es obtener ejemplos concretos de esta estructura. Luego, si se obtuvo una respuesta afirmativa en la pregunta 1, aplicarla a esta construcción para darle estructura nearly a los modelos mínimos de estas homologías.

Bibliografía

[1] Ana Karina González de los Santos, *Estructuras casi-Frobenius*, Tesis doctoral, Departamento de Matemáticas, Unidad Zacatenco, México (2010).

[2] Andrzej Skowroński and Kunio Yamagata, *Frobenius Algebras I*, Basic Representations Theory, European Math. Soc. (2011), 336-347.

[3] Dalia Artenstein, Ana González and Marcelo Lanzilotta, *Constructing nearly Frobenius algebras*, IMERL-Facultad de Ingeniería, Montevideo, Uruguay (arXiv: 1306.3964v1).

[4] Hossein Abbaspour, *On the Hochschild homology of open Frobenius algebras*, arXiv: 1309.3384v2 [math.QA], 27 de Junio 2015.

[5] Ives Félix, Stephen Halperin and Jean Claude Thomas, *Rational Homotopy Theory*, Springer-Verlag New York, Inc. (2001), 40-48.

[6] Ives Félix, John Oprea and Daniel Tandré, *Algebraic Models in Geometry* , Oxford University Press Inc, New York (2008), 64-65.

[7] Joachim Kock, *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*, London Math. Soc. 59, 94-104.

[8] Takayoshi Wakamatsu, *On graded Frobenius algebras*, Academic Press, Journal of Algebra 267 (2003) 377-395.